

Grau en Matemàtiques

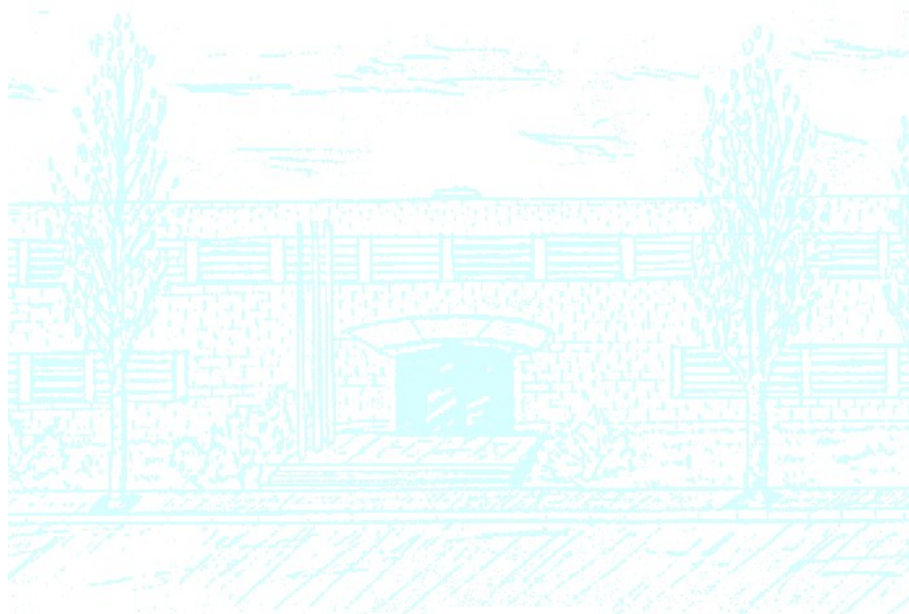
Títol: La matemàtica dels ritmes musicals

Autor: Francisco Fletcher Sanfeliu

Director: Xavier Gràcia Sabaté

Departament: Departament de Matemàtiques

Convocatòria: 2019 - 2020



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau en matemàtiques
Treball de fi de grau

La matemàtica dels ritmes musicals

Francisco Fletcher Sanfeliu

Supervisat per Xavier Gràcia Sabaté

Gener, 2020

Agraïments

A Xavier Gràcia per permetre'm triar aquest treball i per haver-me proporcionat el material necessari per la realització d'aquest.

Resum

En aquest treball s'estudien els ritmes musicals des d'una perspectiva matemàtica. Partint dels treballs de Keith i Toussaint, i utilitzant principalment les eines de la combinatòria, s'ha analitzat la complexitat rítmica, la síncopa, les propietats geomètriques dels ritmes i les construccions més típiques de ritmes d'arreu del món.

Paraules clau: Música, Ritme, Compàs, Subdivisió, Pulsació, Atac, Simetria, Distància, Complexitat, Combinatòria, Binomi.

Abstract

Along this project, we will make an analysis of musical rhythms from a mathematical point of view. Taking into account the researches from Keith and Toussaint, and mainly using combinatorial tools, we have studied rhythm complexity, syncopation, geometric properties of rhythms and the most common compositions of rhythms around the world.

Keywords: Music, Rhythm, Bar, Subdivision, Pulse, Beat, Symmetry, Distance, Complexity, Combinatorics, Binomial.

Resumen

A lo largo de este proyecto se realizará un estudio del ritmo musical desde un punto de vista matemático. Partiendo de los trabajos de Keith y Toussaint, y utilizando principalmente herramientas de combinatoria, se ha analizado la complejidad rítmica, la síncopa, las propiedades geométricas de los ritmos y las construcciones más típicas de estos alrededor del mundo.

Palabras clave: Música, Ritmo, Compás, Subdivisión, Pulsación, Ataque, Simetría, Distancia, Complejidad, Combinatoria, Binomio.

Índex

1	Introducció	9
2	La subdivisió del compàs	12
2.1	Conceptes preliminars	12
2.2	Combinatòria de ritmes	12
2.2.1	Complexitat de la subdivisió	13
2.2.2	La síncopa	14
3	El compàs com a successió d'atacs	17
3.1	La generació del compàs	17
3.2	Sis exemples de ritmes de referència	18
3.3	Propietats i classificació dels ritmes	18
4	Construcció i complexitat dels ritmes	21
4.1	Ritmes binaris i ternaris	21
4.1.1	Binarització dels ritmes ternaris	24
4.2	Isomorfia de ritmes	25
4.3	Senaritat dels ritmes	25
4.4	Complexitat rítmica	27
4.4.1	Mesura de l'entropia	28
4.4.2	Mesura geomètrica	31
4.4.3	Mesura Lempel-Ziv	31
4.4.4	Complexitat cognitiva	33
4.4.5	Irregularitat i l'índex de la variabilitat per parelles normalitzada . .	34
5	Casuística dels ritmes	35
5.1	Ritmes perfectament parells	35
5.2	Ritmes euclidians	36
5.3	Ritmes complementaris	38
5.4	Ritmes plans	40
5.5	Ritmes profunds	43
5.6	Ritmes closca	44
5.7	Ritmes fantasma	46
5.8	Ritmes de reflexió, cànons i ritmes alternats	47
5.9	Semblança i dissemblança rítmica	48
6	Conclusions	51
	Referències	52

Índex de figures

1	(a) i (b) no presenten síncopa, (c) és una prolongació, (d) es una anticipació i (e) una síncopa [Kei]	15
2	Representació gràfica d'un ritme	17
3	Patró rítmic del Bolero de Ravel	17
4	Representació gràfica dels sis ritmes	19
5	Conjunt de distàncies del shiko	19
6	Arbre de decisió per la classificació de ritmes	20
7	Fume-fume	21
8	Comparació del fume-fume (esquerra) i el son (dreta)	21
9	Particions de l'escala octatònica	22
10	Patrons de 12 pulsacions i 10 atacs (esquerra) i 12 atacs (dreta)	23
11	Patrons de 8 atacs descartats	24
12	Escala octatònica	24
13	Superposició del fume-fume (blanc) i son (negre)	25
14	Collars no isomorfs però sí les seves cadenes	26
15	3 ritmes amb 12 pulsacions i 7 atacs amb únicament distàncies 1 i 2	26
16	Treset cubà	27
17	Representació de les entropies sobre eixos de coordenades	28
18	Dos ritmes isomorfs	29
19	Les deu possibilitats restants	30
20	Ritmes de Reich (esquerra) i Haak (dreta)	30
21	Taules amb el nombre de vegades que es repeteix cada distància entre els diferents atacs del ritme de Reich (esquerra) i el de Haak (dreta)	31
22	Exemple de ritme perfectament parell	31
23	Àrea entre la localització dels atacs dels ritmes de Reich (esquerra) i Haak (dreta) i un ritme perfectament parell	32
24	Diccionari Lempel-Ziv pel son	33
25	Els 6 ritmes afrocubans i els seus valors de les diferents complexitats	34
26	Exemples de dos ritmes balancejats	36
27	Construcció d'un compàs maximalment parell	36
28	No tot és el que es percep a primera vista (imatge treta de Google)	38
29	Ritmes complementaris	38
30	Ritmes complementaris no isomorfs entre ells	39
31	Totes les distàncies apareixen únicament una vegada	40
32	Regla de Golomb perfecta amb 4 boles negres	40
33	Dues cadenes homomètriques	41
34	Ritmes plans perfectes	42
35	els 8 diferents ritmes on la diagonal uneix (0,6)	42
36	els 6 diferents ritmes on un costat té longitud 6	43
37	Exemples de conjunts profunds poc interessants	44
38	Patrons rítmics adjacents	45
39	Oscil·lació del braç al tocar el compàs [2-2-4]	46
40	Il·lusions òptiques	46
41	Representació geomètrica del paradiddle	47
42	Exercici mans alternades	48

43	Intercanvi enfront assignació múltiple	49
44	Distància d'edició entre el clave son i el fume-fume	50

1 Introducció

A la vida quotidiana estem envoltats de música, ja sigui per entreteniment, cultura, diversió, publicitat i un llarg etcètera.

La música ha estat estudiada en molts aspectes i per diverses disciplines. Una llista no exhaustiva inclou antropòlegs i sociòlegs, que analitzen la seva rellevància en la societat tant globalment com en cultures concretes; musicòlegs, que en fan un estudi exhaustiu des del fonament físic, històric i també la relació amb l'ésser humà; psicòlegs, que n'estudien la percepció pels sentits i la comprensió per la ment; físics i enginyers que analitzen les propietats del so i la seva generació per instruments musicals; matemàtics, que estudien nombrosos aspectes estructurals com ara la generació d'escala musicals, la relació entre escales i espectres, l'estructura i simetries dels motius, els aspectes algorísmics de la composició, els ritmes, etc.

És probable que al llarg del temps tots hàgem sentit a dir que la música està relacionada amb les matemàtiques, però que no s'hagi donat una explicació detallada o almenys ben argumentada dels motius pels quals es diu això. Les connexions entre matemàtiques i música són nombroses; hi ha prou amb fer una consulta a textos recents com ara els llibres de Benson [Ben] i Loy [Loy], per exemple. Aquest treball se centra en una d'aquestes connexions: el ritme musical i la seva estructura. Hem triat aquest tema degut a la poca informació existent, ja que majoritàriament tota l'atenció va enfocada al so i les escales, mentre que l'estructura bàsica i fonamental que és el compàs, es deixa en un segon pla.

Abans de començar a tractar el concepte de compàs és necessari donar una definició formal d'aquest ja que tant al català com al castellà, aquesta paraula engloba molts aspectes de la música. Per exemple, la definició que dona el DIEC és la següent: "En mús., unitat de mesura del temps nascuda de l'ocurrència regular dels accents, la posició dels quals és marcada en el pentagrama per ratlles verticals posades immediatament davant d'ells.". Per altra banda, el DRAE dona diferents definicions d'aquest que són les següents: 1. "Signo que determina el ritmo en cada composición o parte de ella y las relaciones de valor entre los sonidos." 2. "Movimiento de la mano con que se marca cada compás." 3. "Ritmo o cadencia de una pieza musical." 4. "Espacio del pentagrama en que se escriben todas las notas correspondientes a un compás y se limita por cada lado con una raya vertical."

Al llarg d'aquest treball aquesta definició serà adaptada en funció de l'aspecte que es vulgui tractar però sempre considerant-lo com l'estructura bàsica i fonamental de la música i com a patró cíclic. Al llarg del capítol 2, es tractarà l'estructura del compàs pel que tindrem la següent definició.

Definició 1: Donat un cert nombre de pulsacions n , es defineix el compàs com un patró cíclic on cada pulsació té associada la mateixa durada t i sobre el qual s'escriu un fragment musical de durada exactament igual a $n \cdot t$. Aquest fragment no té per què ser el mateix en els diferents compassos de la composició.

Per altra banda, a la resta de capítols es considerarà la següent definició:

Definició 2: Es defineix un compàs de n pulsacions i a atacs com el conjunt d'elements de so o atacs a i els elements de silenci s que es repeteixen de manera cíclica al llarg de la peça musical i que satisfan $a + s = n$.

Objectius

El principal objectiu és l'estudi dels ritmes i dotar-los d'un fonament matemàtic. Per tal d'això aquest treball se centrarà en l'anàlisi de la seva construcció juntament amb la seva complexitat, així com les propietats que tenen les diferents composicions rítmiques d'arreu del món.

Donades les definicions 1 i 2, es farà servir la primera per tal de subdividir el compàs en subunitats de longitud 2 i 3 amb l'objectiu d'estudiar de quantes maneres diferents es pot subdividir cada compàs i com afecta cada tria a la peça en qüestió. Pel que fa a la segona definició, s'utilitzarà juntament amb les representacions gràfiques de cada compàs per tal d'analitzar diferents propietats d'aquest com ara la simetria, les distàncies, la seva complexitat, etc.

Recursos

Els recursos utilitzats han sigut diversos. Per una part, estan els dos llibres principals en què es basa aquest treball. Un és [Kei], que fa una anàlisi combinatòria d'alguns aspectes de la música: la construcció de les escales musicals basades en l'escala cromàtica, els acords que es poden construir a partir de la mateixa, i finalment les estructures rítmiques, compassos i síncope. L'altre, [Tou], parla fonamentalment de la construcció dels ritmes, on analitza el patró cíclic que segueixen els seus atacs i silencis. Els aspectes en que relaciona aquesta concepció del ritme són diversos. Per donar un exemple, en ocasions el relacionarà amb la teoria de grafs degut a les definicions de distància, rotacions i simetria entre altres; en unes altres amb la computació, per parlar de diferents algorismes de generació de ritmes; amb l'estadística per tal d'utilitzar la definició de l'entropia amb la intenció d'aportar una possible definició de complexitat rítmica, etc.

A més, s'ha utilitzat un treball de fi de màster [Jad] dut a terme a la Universitat Pompeu Fabra, també basat en [Tou] i que ha sigut de gran ajuda a l'hora d'entendre alguns conceptes concrets.

Els recursos matemàtics emprats es basen principalment en la combinatòria i la teoria de grafs. A més d'això també s'ha elaborat un algorisme programat en C++ per tal d'identificar i comprovar els 10 ritmes que s'observen a la figura 19.

El document també conté una abundant presència de diverses imatges elaborades mitjançant el paquet tikz de L^AT_EX, generalment es trobaran representacions gràfiques per exemplificar certs ritmes ja que aquesta ens serà útil a l'hora de veure certs aspectes com ara la simetria o el seu histograma de distàncies.

Contingut

El treball s'estructura en quatre capítols clarament diferenciats, cadascun dels quals aporta un enfocament diferent a l'estructura dels ritmes. A continuació es dona un breu resum dels continguts dels capítols. A l'inici de cadascun d'aquests es detallarà la bibliografia emprada, a més de donar una idea dels diferents conceptes que hi apareixen.

Capítol 2

Aquest capítol, la subdivisió del compàs, es basa en el llibre escrit per M. Keith [Kei], on, després de donar uns conceptes previs, es parla del compàs com una estructura mètrica

i s'esmentaran les maneres que té el cervell humà a subdividir aquest quan el nombre de pulsacions és massa gran com per a poder enumerar-les d'una en una.

S'intentarà donar una definició formal de la complexitat associada a cada tipus de subdivisió.

Apareixeran conceptes musicals com ara el compàs, les figures així com la síncopa, i conceptes matemàtics com ara alguns bàsics de la combinatòria, per exemple, la definició d'un coeficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Capítol 3

A continuació es tracta el compàs com a successió d'atacs, basat principalment en el llibre escrit per G. T. Toussaint [Tou] amb suport d'un treball de fi de màster realitzat per Jade [Jad] s'analitzaran les diferents construccions rítmiques possibles partint d'una mostra de 6 ritmes afrocubans molt populars arreu del món i s'introduiran les propietats i aspectes matemàtics que amaguen les seves representacions geomètriques com ara la simetria, la presència de triangles isòsceles o angles rectes, etc., utilitzant-los en general com a exemples i proposant possibles maneres de classificar-los mitjançant arbres de decisió.

Capítol 4

Els continguts musicals que es tractaran al llarg del capítol anomenat construcció i complexitat dels ritmes també estaran basats en [Tou] i [Jad] i aquests seran les definicions de ritmes binaris i ternaris juntament amb la descripció d'altres possibles patrons rítmics inspirats en les diferents escales musicals més populars, com la pentatònica i l'octatònica. Per aquesta última, s'enunciarà el teorema de Cohn per les particions per parelles, demostrat per Brian McCartin en [McC].

Es donarà també la definició d'isomorfia de ritmes, la definició de ritmes senars i, finalment, un estudi de la complexitat d'un patró rítmic des de diferents punts de vista, on es tractaran aspectes com ara l'entropia del seu histograma de distàncies, distàncies euclidianes respecte un ritme regular, aspectes cognitius, i l'índex de la variabilitat per parelles normalitzada entre altres.

Capítol 5

Finalment, a l'últim capítol que s'ha anomenat casuística dels ritmes, es parlarà de diferents aspectes d'especial rellevància que s'observen als diferents ritmes. Basant-se en [Tou] i [Jad], s'utilitzarà l'algorisme d'Euclides per l'elaboració de ritmes i per l'identificació d'aquests, anomenats ritmes euclidians, així com altres aspectes rítmics que s'aniran veient com aquells que són complementaris. També es definiran els ritmes plans, que són aquells en què cada atac té una durada diferent; els profunds, que són aquells on cada distància entre els atacs apareix un nombre únic de vegades; els ritmes closca, que són aquells que retenen una certa propietat p tot i que s'elimini o s'afegeixi un atac; els ritmes fantasma, que són aquells que sense ser tocats poden arribar a ser percebuts per l'oient. Més endavant s'esmentaran diferents exercicis de tècnica pels percussionistes, com ara el paradiddle, que donen lloc a estructures interessants i, finalment, els criteris mitjançant els quals es pot dir que dos patrons rítmics s'assemblen o no.

2 La subdivisió del compàs

Al llarg d'aquest capítol basat majoritàriament en [Kei], primer es donaran una sèrie de conceptes bàsics per tal que el lector es familiaritzi amb els aspectes que es tractaran més endavant i així facilitar la comprensió. Posteriorment, es tractaran aspectes com la complexitat de la subdivisió d'un compàs i la construcció de la síncopa i el seu impacte sobre la peça.

2.1 Conceptes preliminars

Abans de començar a parlar de l'estructura del compàs, és convenient fer una petita introducció d'alguns conceptes bàsics que engloben tant a les matemàtiques com als ritmes.

En primer lloc es parlarà d'una manera de representació del compàs que es trobarà sovint durant aquest document. Aquesta representació serà mitjançant una cadena

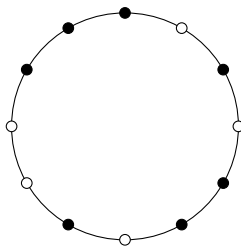
Definició: Una cadena és una línia recta amb n boles de m colors diferents.

Com es veurà al llarg del treball, només s'utilitzaran 2 colors per construir les cadenes ja que, per una banda, durant aquest capítol només es consideraran subdivisions en subcompassos de 2 i 3 pulsacions mentre que en els posteriors capítols únicament es parlarà d'atacs i silencis. És per això que només s'utilitzaran els colors negre i blanc com es mostra a continuació com a exemple:



Donat que un ritme és (o almenys acostuma a ser) una composició cíclica en el temps, és lògic tenir una representació cíclica d'aquest. És per això que una altra manera de representar-lo serà mitjançant un collar, que es defineix a continuació:

Definició: Un collar és una cadena on s'han connectat els dos extrems, fent-la cíclica. Per exemple:



Donades aquestes definicions es veuran certs resultats combinatoris interessants.

2.2 Combinatòria de ritmes

Una peça musical està formada per dues components fonamentals. Per una banda es troba l'harmonia, formada per les notes, i per l'altra, el ritme. S'estudiarà la part matemàtica del ritme, no sense fer abans un parell d'aclariments.

Un compàs es divideix en pulsacions, aquestes pulsacions sempre estaran detallades a l'inici de la partitura i, en alguns casos, canviaran al llarg de la composició. Aquestes pulsacions s'expressen de la següent manera: $\frac{n}{m}$ el número de dalt (n) representa el nombre de pulsacions dins de cada compàs, mentre que el de sota (m) expressa la figura sobre la

qual es donaran les pulsacions. La manera en la que estan relacionades és la següent: la rodona s'expressa mitjançant el símbol \circ , la blanca amb \downarrow , la negra amb \blacksquare , la corxera amb ♪ i la semicorxera amb ♩ que els corresponen respectivament els denominadors 1, 2, 4, 8 i 16 i així successivament amb potències de 2, ja que, fixada una "velocitat", la durada de cada figura és la meitat de l'anterior.

Donada aquesta definició, es fàcil veure que, depenent de la velocitat establerta, un compàs $\frac{3}{4}$ és equivalent a un compàs $\frac{3}{8}$ a la meitat de velocitat. És per això que no s'especificarà quina mètrica es segueix i simplement es centrarà en el número de pulsacions.

A la pràctica, quan algú interpreta una peça musical, no sempre segueix estrictament el nombre de pulsacions que aquesta indica, el cervell tendeix a "simplificar" el compàs en grups de 2 o 3 pulsacions. Aquesta pràctica reb el nom de subdivisió.

Exemple: Quan es troba un compàs amb 6 pulsacions es tendeix a subdividir-lo en 2 grups de 3 pulsacions o bé 3 grups de 2 pulsacions.

2.2.1 Complexitat de la subdivisió

Arran de la subdivisió proposada, es planteja la primera qüestió. Donat un compàs de n pulsacions, de quantes maneres diferents es pot subdividir?

Lògicament, la partició més senzilla és $(2 \ 2 \ \dots \ 2)$ o, si n és senar, $(3 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2)$. Des d'aquestes particions, es pot incrementar el nombre de tresos reemplaçant un grup de 3 dosos per un de 2 tresos, fins a un màxim de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Si es denota per k un nombre fixat de tresos, el nombre de dosos que es trobaran al compàs serà $\frac{n-3k}{2}$. La qual cosa voldrà dir que en total s'haurà subdividit el compàs en $\frac{n-3k}{2} + k = \frac{n-k}{2}$ elements i sorgeix la següent pregunta:

De quantes maneres diferents es pot subdividir un compàs de n pulsacions en cadenes, amb dosos i tresos amb exactament k tresos? La resposta a aquesta pregunta proporciona el següent resultat.

Proposició: El nombre de subdivisions d'un compàs de n pulsacions amb exactament k tresos ve donat per la fórmula

$$\binom{(n-k)/2}{k}$$

i el nombre total de subdivisions $r(n)$ que admet serà

$$r(n) = \sum_{\substack{k=n \bmod 2 + 2i \\ i \geq 0}}^n \binom{(n-k)/2}{k}.$$

Dins d'aquests diferents compassos, un resultat útil pot ser el de triar quins són aquells més "fàcils" d'entendre, és a dir, quins són aquells amb patrons més senzills ja que, si s'alternen dosos i tresos un a un, s'obté $(2 + 3) (2 + 3), \dots$ que es pot entendre com un compàs de 5 pulsacions. Així mateix, aquells que siguin $(2 + 2 + 3), (2 + 3 + 2)$ o $(3 + 2 + 2)$ es poden entendre fàcilment com un compàs de 7 pulsacions i així successivament.

Donada aquesta situació. Es defineix el següent concepte:

Definició: Sigui S una cadena de 2's i 3's i donada una partició d'aquesta en un conjunt disjunt de subunitats, on cada subcadena té longitud ≥ 1 i on la unió de subcadena

és S . Aleshores es defineix una unitat com una o més subunitats adjacents i la complexitat com el valor de la cadena S que ve donada per $c(S)$. La complexitat d'una unitat G consisteix en el màxim entre el nombre de subunitats idèntiques H i la complexitat d'aquestes:

$$c(G) = \max(\text{nombre de subunitats}, c(H)).$$

Partint de que les unitats $G = 2$ i $G = 3$ tenen complexitat 2 i 3 respectivament, donada una subdivisió, la complexitat de S és expressada per

$$c(S_u) = \sum_{G \in S} c(G)$$

D'on es dedueix que la complexitat de S és el mínim valor de complexitat per una certa subdivisió de S :

$$c(S) = \min(S_u)$$

Exemple: Per a $n = 9$, es té la següent taula de complexitats per a les 5 subdivisions possibles:

Subdivisió	c
3 3 3	3
3 2 2 2	6
2 2 2 3	6
2 3 2 2	7
2 2 3 2	7

Aquesta definició, a més de donar un enfoc amb rigorisme matemàtic, es correspon de manera prou raonable amb les situacions quotidianes a l'hora d'interpretar una peça musical.

Si per un n determinat es para atenció en el nombre de subdivisions que tenen una complexitat c s'obté el valor $\kappa(n, c)$.

Es pren $\Lambda(n)$ com el valor màxim que pot assolir c per un cert n . Per exemple, per $n = 2, 3, \dots, 20$ es té:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\Lambda(n)$	2	3	2	5	3	7	8	7	8	8	10	10	11	10	13	12	13	13	15
$n - \Lambda(n)$	0	0	2	0	3	0	0	2	2	3	2	3	3	5	3	5	5	6	5

Proposició: No existeix cap altre n que satisfaci $\kappa(n, n) = 0$.

Demostració: Es demostrarà per inducció.

Sigui S una cadena de longitud n , per $n > 8$ i sigui T la subcadena obtinguda d'eliminar el primer element de S que s'anomenarà k . Així, la màxima complexitat de S pot ser $k + c(T)$. Per definició, $c(T) \leq \Lambda(n - k)$. Per hipòtesi d'inducció, $\Lambda(n - k) < n - k$ i per tant, $c(T) < n - k$ i així, $c(S) < (n - k) + k = n$. Com que això es satisfà per qualsevol S , aleshores es dona que $\Lambda(n) < n$. \square

2.2.2 La síncopa

Com és d'esperar, en una peça musical no només es para atenció a la subdivisió del compàs, aquesta és important per a l'interpret a l'hora d'entendre la partitura. A més, la disposició de les notes sobre el compàs també pot donar lloc a diferents fenòmens.

Un fenomen interessant en la música és la síncopa. Es diu que un compàs és sincopat quan l'inici d'aquest no pertany a cap pulsació. Estudiant la casuística d'aquest succés es poden trobar tres casos diferents. Un d'ells és la prolongació, que consisteix en el fet que un so acaba després d'una pulsació. Un altre és l'anticipació, que consisteix en el fet que un so comença abans de la pulsació i, finalment, la síncopa, que serà la combinació de les altres dues.

A la figura 1 es mostren uns exemples d'aquests fenòmens:

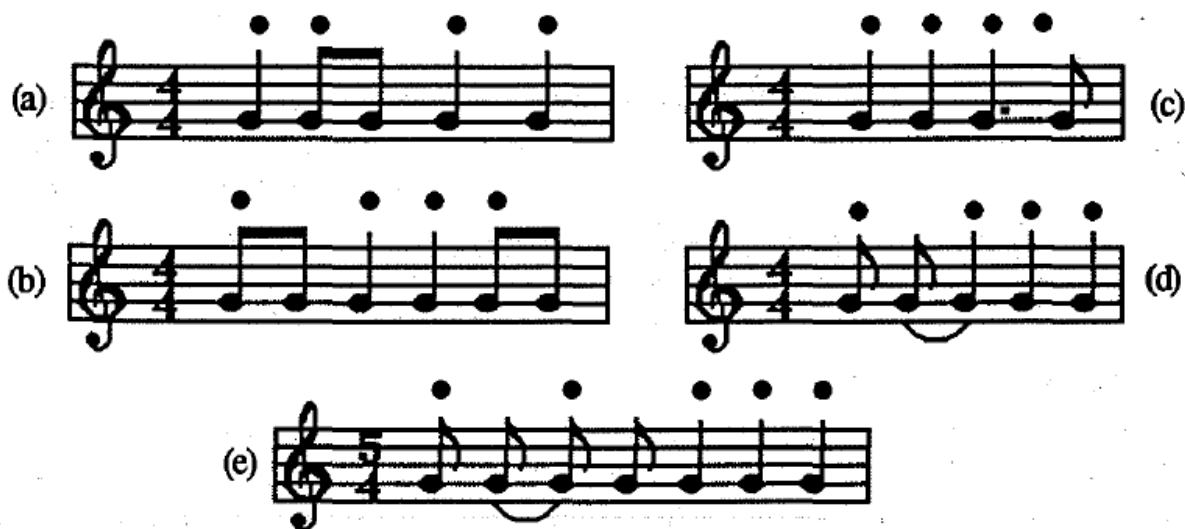


Figura 1: (a) i (b) no presenten síncopa, (c) és una prolongació, (d) es una anticipació i (e) una síncopa [Kei]

A més, se li assigna a cadascun d'aquests fenòmens un valor que mesuri l'impacte d'aquest sobre el ritme del compàs de la següent manera:

$$\begin{aligned} \text{prolongació} &= 1 \\ \text{anticipació} &= 2 \\ \text{síncopa} &= 3 \quad (= \text{prolongació} + \text{anticipació}) \end{aligned}$$

Que s'anomena valor de síncopa (s).

Aquest valor síncopa està fortament lligat a una altra definició que és el fet que un so estigui a destemps. Es dona la definició d'un so a destemps de la següent manera:

Sigui δ la duració del so (o esdeveniment) expressada com a múltiple de $(\frac{1}{2})^d$ ($d \in \mathbb{N}$) pulsacions i sigui S l'instant de començament de l'esdeveniment, aleshores, si S no és múltiple de $(\frac{1}{2})^d$ es dirà que l'esdeveniment comença a destemps. Així mateix, l'esdeveniment acaba a destemps si $S + \delta$ no és múltiple de $(\frac{1}{2})^d$.

Ara es pot donar una definició més formal del valor de síncopa que és la següent:

$$s = 2 \cdot \mathbb{1}_{\text{comença a destemps}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\text{acaba a destemps}}$$

A continuació s'estudiara quants compassos diferents hi ha fixant els paràmetres "posició" p , "nombre d'esdeveniments" n i "valor de síncopa" s que s'anomenarà $Sy(p, n, s)$.

Per tal d'això caldrà utilitzar una funció auxiliar $\sigma(p, n, m, s)$ que es defineix com el nombre de n subritmes començant a la posició m amb valor de síncopa $\leq s$.

D'aquesta manera s'obté que

$$Sy(p, n, s) = \begin{cases} \sigma(p, n, 0, s) - \sigma(p, n, 0, s-1) & (s > 0) \\ \sigma(p, n, 0, s) & (s = 0) \end{cases}$$

Una fórmula recursiva per calcular $\sigma(p, n, m, s)$ pot venir donada per analitzar totes les possibles durades del pròxim esdeveniment (que comença a la posició m) i afegint els $n-1$ subritmes generats en cada cas.

La duració de l'esdeveniment d ha de satisfer $1 \leq d \leq p-m$ ja que no pot excedir la duració del compàs.

Fixada una d , el nombre de possibles subritmes és $\sigma(p, n-1, m+d, s-S(d))$ on $S(d)$ és el valor de síncopa de l'esdeveniment de duració d que comença a la posició m , que pot ser calculat de la següent manera:

$$S(d) = 2 \cdot \mathbb{1}_{D(d) \nmid m} + 1 \cdot \mathbb{1}_{D(d) \nmid (m+d)}$$

On $D(d) = 2^i$ on i és tal que $|d-2^i|$ és mínim.

D'aquesta manera, es defineix $\sigma(p, n, m, s)$ així:

$$\begin{aligned} \sigma(p, n, m, s) &= \sum_{1 \leq d \leq n-m} \sigma(p, n-1, m+d, s-S(d)) \\ \sigma(p, 0, m, s) &= \begin{cases} 1 & \text{si } m=p \text{ i } s \geq 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Per exemple, aplicant aquesta fórmula pel valor $p = 4$ i qualsevol valor per n i s obtenim la següent taula:

	n			
s	1	2	3	4
0	1	1	2	1
1	0	1	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0

Cadascuna d'aquestes té com a representació d'atacs i silencis la que s'observa a la següent taula:

Patró	n	s
x . . .	1	0
x . x .	2	0
x x x .	3	0
x . x x	3	0
x x x x	4	0
x . . x	2	1
x x . .	2	2
x x . x	3	3

3 El compàs com a successió d'atacs

Aquest capítol se centra majoritàriament en [Tou], havent utilitzat també altres recursos com ara [Jad].

Com s'haurà pogut observar en l'anterior capítol generalment s'ha estudiat sobretot la subdivisió d'un compàs de n pulsacions i la síncopa. Al llarg d'aquest capítol, l'anàlisi que es farà anirà enfocada a la construcció dels ritmes i s'estudiaran alguns ritmes tradicionals propis de diferents cultures. Aquesta anàlisi ens permetrà comparar les diferents característiques que presenten amb l'objectiu de poder fer una comparativa d'aquests i finalment poder classificar-los.

3.1 La generació del compàs

A partir d'ara s'entendrà el compàs com cadascun dels atacs que es fan amb un instrument, cantant, o amb les palmes per marcar el ritme d'una peça. Aquest compàs es representarà de diverses maneres. Per exemple, en un compàs de durada 12 pulsacions on hi ha quatre atacs, cadascun d'aquests de durada 3, una manera de representar-lo serà mitjançant aquesta notació: [X..X..X..X..] on les X representen l'atac i els punts els silencis. Una altra manera serà mitjançant un vector amb les durades de cada atac, en aquest cas, [3-3-3-3] i per últim, la més visual de totes, mitjançant un collar, com s'ha esmenat al capítol anterior:

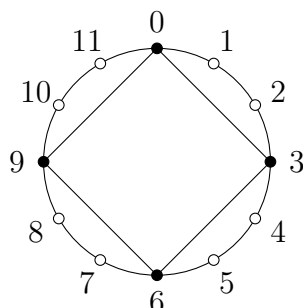


Figura 2: Representació gràfica d'un ritme

Una de les raons per la qual s'utilitza aquesta nova notació és perquè, si s'analitza una peça musical, és possible que el compàs en què aquesta està escrita no es correspongui amb el cicle del ritme que aquesta presenta.

Un clar exemple seria el Bolero de Ravel, que està escrit en un $\frac{3}{4}$ però, el ritme, en aquest cas marcat per una caixa, segueix el següent patró:



Figura 3: Patró rítmic del Bolero de Ravel

Que, fàcilment es pot transcriure com: [3-1-1-1-3-1-1-1-3-3-1-1-1-3-1-1-1-1-1-1-1].

Evidentment no es pot pretendre que un compositor estructuri tota la peça condicionat únicament pel ritme que segueix aquesta, ja que en primer lloc, ha de tenir una mètrica i estructura comprensible per a l'interpret i és per això que s'utilitza l'estructura que s'ha escrit prèviament a la figura 3.

3.2 Sis exemples de ritmes de referència

Donades les anteriors pautes, si per exemple es pren un compàs amb 16 pulsacions i s'imposa la condició que contingui 5 atacs amb un càlcul combinatori senzill s'obté que existeixen $\binom{16}{5} = \frac{16!}{11!5!} = 4368$ possibilitats. Evidentment no totes aquestes seran interessants ja que, per exemple [XXXXX.....] o [.XXXXX.....], tot i ser perfectament viables en algun fragment d'una obra musical, a conveniència del compositor, manquen d'interés matemàtic.

Dit això, es destaquen 6 ritmes d'aquests 4368, tots ells diferents i originaris de diferents cultures i llocs d'arreu del món que són els següents:

- **Shiko**, comú a l'oest d'Àfrica, i al Carib, amb compàs [4-2-4-2-4]
- **Son** o Clave son, originari de Cuba, amb compàs [3-3-4-2-4]
- **Rumba**, conegut al folklore afrocubà, amb compàs [3-4-3-2-4]
- **Soukous**, derivat de la rumba quan va arribar a l'Àfrica central, amb compàs [3-3-4-1-5]
- **Gahu**, comú a Ghana, amb compàs [3-3-4-4-2]
- **Bossa-nova**, popular a la música tradicional africana i brasilera, amb compàs [3-3-4-3-3]

Aquests 6 ritmes afrocubans satisfan propietats interessants que s'aniran veient al llarg del capítol. A més seran d'ajuda per exemplificar diversos conceptes com ara l'entropia, simetria, etc.

Si s'observen les representacions gràfiques d'aquests 6 ritmes de la figura 4 s'observaran diverses particularitats que seran analitzades al següent apartat.

3.3 Propietats i classificació dels ritmes

Com es pot observar fàcilment, les línies rectes representen l'eix de simetria dels ritmes shiko, son i bossa-nova. Aquest fet també es podia percebre quan s'observava el vector de duracions dels atacs, ja que aquests eren palindròmics.

Una particularitat que la representació gràfica permet apreciar és la presència de triangles isòsceles, presents al shiko, son i soukous, que en tenen un, i al gahu i al bossa-nova, que en tenen tres.

Per últim, també hi ha la presència d'angles rectes al shiko, soukous i gahu, els primers dos a la primera pulsació i l'últim a la desena.

Aquests fets contribueixen en certa manera a la capacitat que tenim les persones per entendre el ritme que s'escolta i donaran informació sobre la seva complexitat. Aspectes que s'analitzaran més endavant.

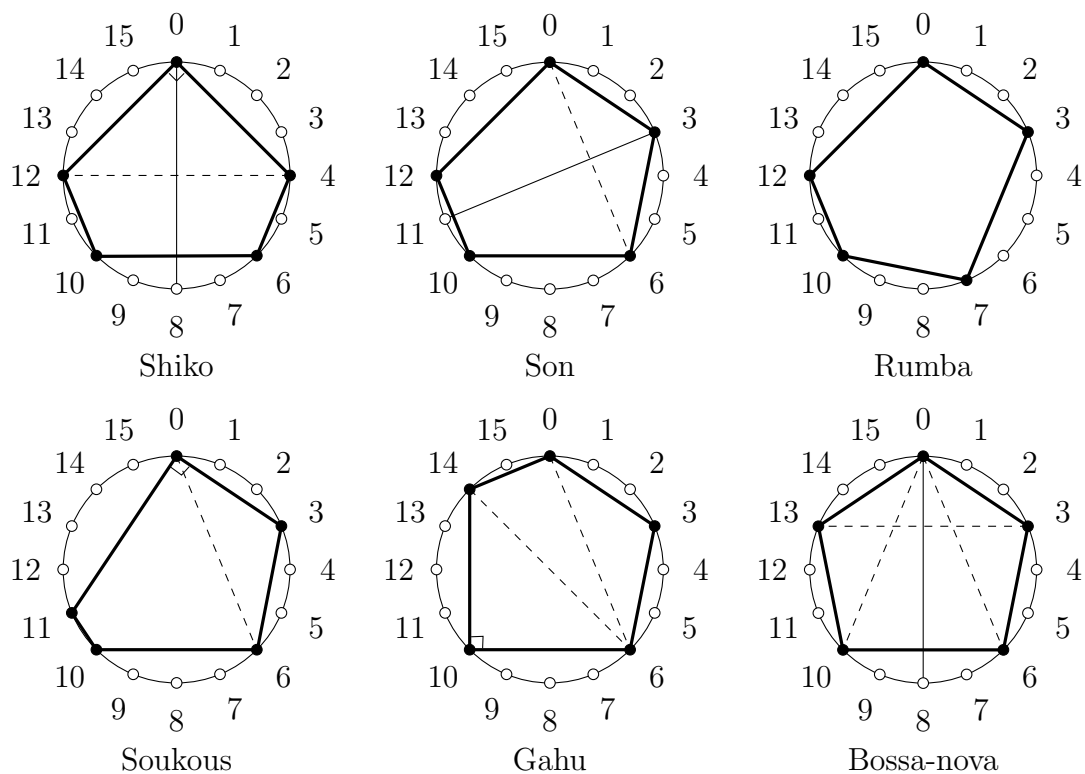


Figura 4: Representació gràfica dels sis ritmes

Un altre fet a tenir en compte són les distàncies entre cadascun dels atacs d'aquests ritmes.

A la figura 5 a manera d'exemple s'observa el graf complet amb les distàncies associades del ritme shiko.

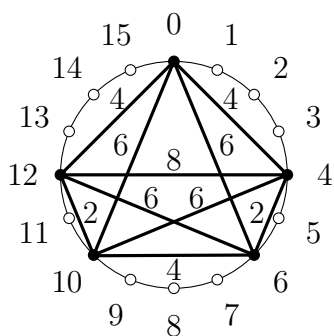


Figura 5: Conjunt de distàncies del shiko

Com que la definició de distància en una component connexa d'un graf ve donada pel nombre mínim de moviments que es poden fer per arribar d'un node a un altre, la distància màxima que es pot assolir en aquest cas serà 8.

Ara es planteja una manera de classificació, i aquesta és dient quantes vegades apareix

una distància determinada i s'obté aquesta taula:

	1	2	3	4	5	6	7	8
Shiko	0	2	0	3	0	4	0	1
Son	0	1	2	2	0	3	2	0
Rumba	0	1	2	2	1	1	3	0
Soukous	1	0	2	1	2	2	1	1
Gahu	0	1	2	2	1	2	1	1
Bossa-nova	0	0	4	1	0	3	2	0

Una característica que tenen en comú aquests 6 ritmes és que, si se sumen totes les distàncies de cadascun d'aquests, sempre s'obtindrà el mateix nombre, 48.

A partir de l'anterior anàlisi dels ritmes es podrà realitzar una classificació molt més esquemàtica d'aquests. Per exemple mitjançant un arbre de decisió que, si és construït convenientment, pot ser molt variat. Per exemple:

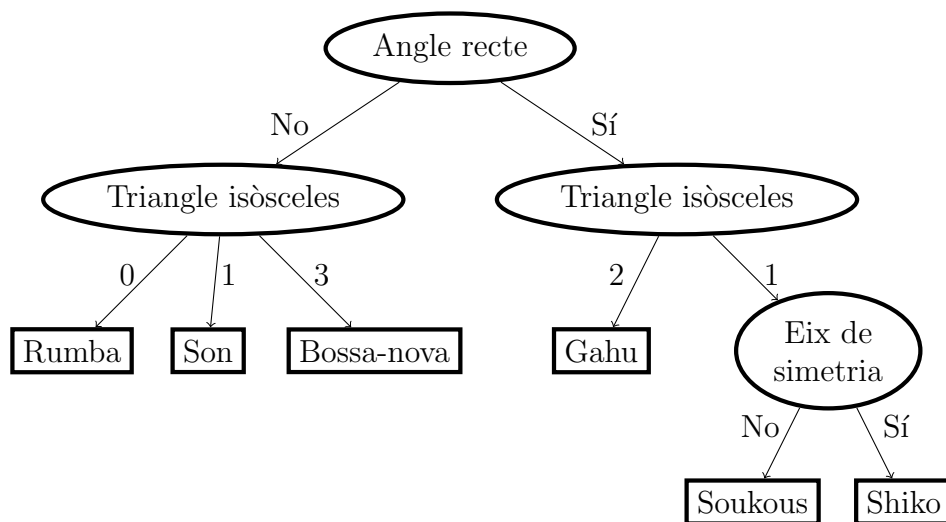


Figura 6: Arbre de decisió per la classificació de ritmes

4 Construcció i complexitat dels ritmes

En aquest capítol que s'inspira en [Tou] i [Jad], es parlarà de diferents maneres d'obtenir uns ritmes a partir d'uns altres així com el criteri per dir quan dos ritmes són iguals (o isomorfs) amb l'objectiu de, finalment, donar diverses definicions de complexitat rítmica.

4.1 Ritmes binaris i ternaris

Els anteriors exemples, com ja s'ha dit, són ritmes de 16 pulsacions, que és una potència de 2. Tots els ritmes que comparteixen la propietat de tenir un nombre de pulsacions que sigui múltiple de 2 s'anomenen ritmes binaris. Mentre que aquells que tinguin un nombre de pulsacions que es pugui expressar mitjançant $2^n \cdot 3$ on $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ s'anomenen ritmes ternaris. Aquests són per exemple 3, 6, 12, 24... Un ritme interessant originari de l'oest d'Àfrica és el fume-fume, un ritme de 12 pulsacions amb 5 atacs que té per representació geomètrica la que s'observa a la figura 7:

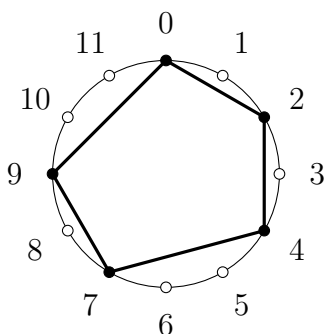


Figura 7: Fume-fume

Que, si és analitzada detingudament s'observa que té unes propietats molt similars a les del son, ja que ambdós contenen exactament un triangle isòsceles i que el seu eix de simetria es troba al segon atac.

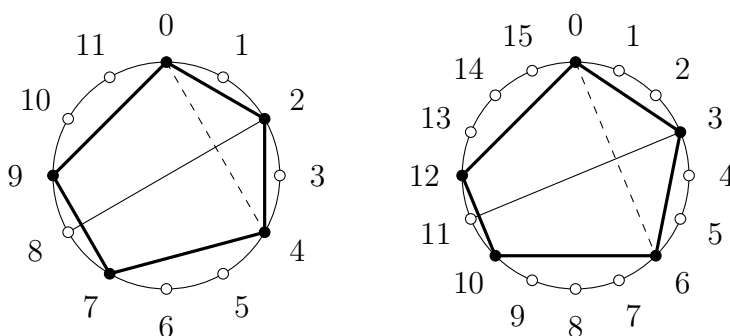


Figura 8: Comparació del fume-fume (esquerra) i el son (dreta)

La generació de ritmes, entre altres coses ve inspirada per aspectes molt diversos. Una d'aquestes fonts d'inspiració són les escales sobre l'escala cromàtica.

Abans de continuar, és necessari fer un parèntesi per tal d'explicar detalladament la definició d'escala.

Definició: Una escala de n notes està formada per aquells sons que tenen associada una freqüència f compresa entre una freqüència f_0 , que anomenarem tònica, i la de la nota amb freqüència associada $2f_0$ a la qual se li donarà el nom de ser la seva octava. La freqüència associada a cadascuna de les notes d'aquesta escala ve donada per $f_i = f_0 + \frac{i}{n} \cdot f_0$ per $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Donada una escala, així amb els ritmes, no sempre s'utilitzen totes les notes en una composició musical, es per això que habitualment es seleccionen un conjunt de notes d'aquesta i la manera de representar aquesta tria es pot fer mitjançant un vector de distàncies de manera anàloga a com es fa amb els ritmes.

Habitualment, l'escala sobre la qual es fa aquesta tria es la de 12 notes, també coneguda com a escala cromàtica. La tria més coneguda és l'escala musical on només s'utilitzen 7 d'aquestes notes (coneguda com a escala heptatònica), aquesta tria deixaria un total de $\binom{12}{7} = 792$ possibles combinacions, però habitualment s'afegeix una restricció que indica en quina posició van els semitons (parelles de notes a distància 1). Més concretament, en les escales majors el vector de distàncies seria el següent: [2-2-1-2-2-1]. Una altra escala també molt popular, sobretot a la música jazz, és l'escala pentatònica. Aquesta té com a vector de distàncies [2-2-3-2-3].

Si es representa gràficament la segona, s'observa que coincideix exactament amb el fume-fume, presentat anteriorment.

Per últim, si es considera l'escala octatònica, menys comú que les anteriors, però amb contingut matemàtic interessant, donada pel vector de distàncies [2-1-2-1-2-1-2-1]. De nou, si tornem a escriure la representació gràfica del ritme que tindria associat, es veuen diversos aspectes interessants.

Per exemple, té quatre eixos de simetria, els que connecten les pulsacions (1,7) i (4,10), a més dels dos que biseccionen els costats de longitud 1 de l'octagon. Admet totes les possibles particions 2 a 2 prenent les distàncies 1,2,3,4,5 i 6 com mostra la figura 9. Per acabar, d'entre totes les possibles escales amb 8 tons, aquesta és la que maximitza l'àrea del polígon.

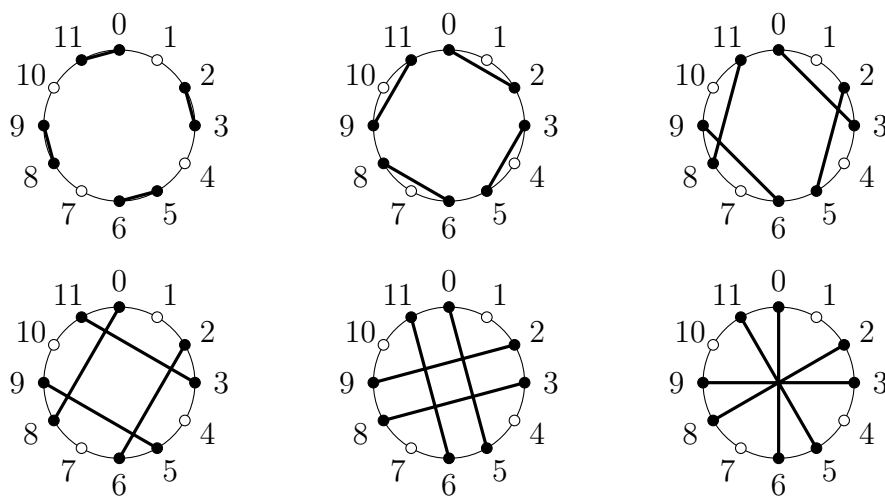


Figura 9: Particions de l'escala octatònica

Aquestes propietats van donar lloc al resultat següent:

Teorema de Cohn: L'únic patró amb 12 pulsacions i 8 atacs que admet una partició binària per les 6 possibles distàncies és el de l'escala octatònica, tret d'isomorfismes.

Demostració: La demostració d'aquest teorema va ser donada per Brian McCartin [McC] i diu així:

Primer, com que es volen aconseguir particions per parelles, és evident que el nombre d'atacs a haurà de ser parell. A més, per $n = 2, 4$ i 6 , no hi ha prou possibles parelles ja que es necessiten almenys $3 \cdot 6 = 18$ possibles emparellaments i com a molt es tenen $\binom{6}{2} = 15 < 18$.

Abans de considerar els patrons de 8 atacs, es descartaran en primer lloc aquells de 10 i 12. Per al cas de 10 atacs, es té que per al cas de les particions de longitud 3, el patró ha de contenir cinc des sis possibles trítors. Per tant, els dos silencis hauran de ser diamètricament oposats tal i com es veu representat a l'esquerra de la figura 10. Però, el patró mostrat no admet una partició per longitud 1 degut a que en cada meitat d'aquest hi ha un nombre senar d'atacs. Considerant ara els patrons amb 12 atacs, si es considera una partició de 4 o 5 elements, la tria d'una parella exclourà altres i per tant la partició quedarà incompleta, un exemple es veu a la dreta de la figura 10 on la partició triada es representa amb una línia contínua i les que automàticament es descarten amb una línia de punts.

Així doncs, es consideraran únicament els patrons de 8 atacs ja que la resta de possibilitats han sigut descartades. De tots els possibles patrons, es descartaran aquells que continguin la distància 4, ja que no permeten la partició per parelles amb longituds 3, 5 i 6. Donat que el patró haurà d'incloure quatre de les sis parelles a distància 3, s'observa que els quatre silencis hauran d'estar en posicions antipodals. Però, si es dona una distància de 3 entre dos atacs consecutius, com es pot comprovar a l'esquerra de la figura 11, no permet la partició de longitud 3. Així mateix, considerant el patró de la dreta de la figura 11, s'observa que aquesta tampoc admet una partició de longitud 3.

Finalment, donada l'eliminació dels dos anteriors patrons, l'única possibilitat és la que es mostra a la figura 12 i, llevat de rotacions, es conclou que aquest és l'únic patró possible. \square

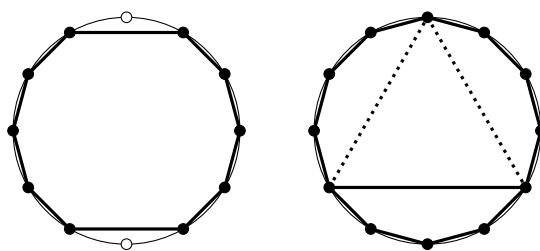


Figura 10: Patrons de 12 pulsacions i 10 atacs (esquerra) i 12 atacs (dreta)

Tornant a la comparació entre el fume-fume i el son, és probable que una persona que estigui acostumada a escoltar el son, quan escolti per primera vegada el fume-fume, el confongui i el percebi com a un ritme binari. Per tal de comparar-los es superposaran aquests dos ritmes en un mateix compàs de 48 pulsacions (el mínim comú múltiple de 12 i 16) i el que es farà serà multiplicar el vector de distàncies per 4 i per 3 respectivament. Així, el vector del fume-fume serà [8-8-12-8-12] mentre que el del son serà [9-9-12-6-12].

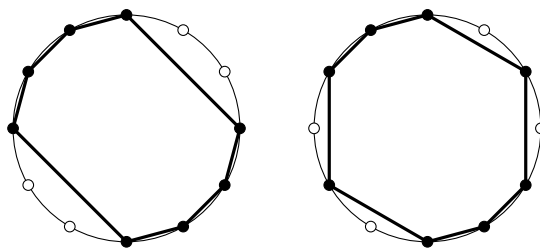


Figura 11: Patrons de 8 atacs descartats

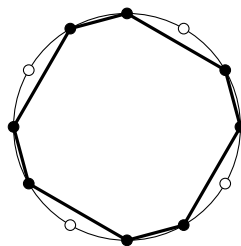


Figura 12: Escala octatònica

Si es superposen en la mateixa representació gràfica de la figura 13, es pot percebre el motiu pel què són tan fàcils de confondre.

4.1.1 Binarització dels ritmes ternaris

A causa dels viatges d'alguns músics i compositors que van voler utilitzar els ritmes que havien escoltat en diferents parts del món es va donar un fenomen interessant, com és que els ritmes ternaris van ser adaptats a compassos binaris. Això planteja un problema matemàtic interessant: la binarització dels ritmes ternaris des d'un punt de vista de distàncies geomètriques.

Un algorisme bastant senzill per a dur a terme aquesta binarització podria ser el següent: s'associa a cada pulsació del ritme original l'angle que tindrà la seva representació gràfica sobre una circumferència. Donat un compàs binari, s'associa l'atac a la posició amb angle més proper a l'original.

El mateix algorisme però, amb la seva interpretació geomètrica seria el següent: es dibuixen dues circumferències concèntriques, una exterior i una altra interior. A l'exterior es dibuixa la representació geomètrica del ritme original i la segona es divideix en parts iguals, cadascuna corresponent a la fracció de $\frac{360}{2^n}$. Així, el punt amb un angle més proper al ritme original serà la nova posició d'aquest en el ritme binari.

És fàcil veure que aquest algorisme no és del tot útil, ja que no s'ha definit clarament el nombre de pulsacions que hauria de tenir el nou compàs i, a més, es podria donar el cas en què a una posició del nou compàs li corresponguin dos atacs o més de l'original. Una manera de solucionar aquest problema és emprar un nombre de pulsacions que sigui potència de 2 i a més que sigui més gran al nombre de pulsacions del compàs original. Així mateix, tampoc s'ha definit un límit de pulsacions i, és evident que com més gran sigui n , més propera serà la nova posició a l'original. Però, evidentment això no acaba sent del tot viable. És per això que en aquest cas s'utilitzarà la mínima potència de 2 que

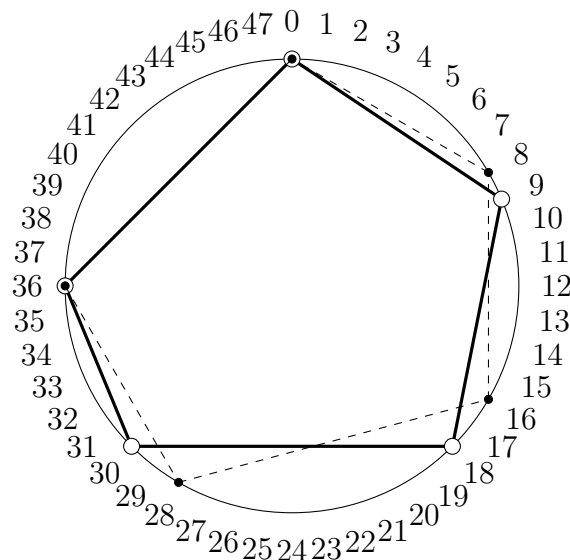


Figura 13: Superposició del fume-fume (blanc) i son (negre)

sigui més gran que el nombre de pulsacions del compàs original.

4.2 Isomorfia de ritmes

Ara mateix, un podria preguntar-se sota quines circumstàncies es pot considerar que dos ritmes són el mateix o, per ser més concrets, quan dos ritmes són isomorfs.

És fàcil adonar-se que el fet que dos ritmes on apareguin el mateix nombre de distàncies i es repeteixin el mateix nombre de cops no és condició suficient per aquesta isomorfia. Recuperant les definicions de cadenes i collars del capítol anterior, es diu que dos collars són isomorfs si existeix una rotació r tal que les boles dels dos es troben exactament en la mateixa posició. De manera similar, dues cadenes són isomorfes si combinant una rotació r i una simetria s s'obté exactament la mateixa cadena.

A la figura 14 es mostra un exemple de dos collars que no són isomorfs però que, en canvi, les seves cadenes associades sí que ho són.

D'ara endavant, s'entendrà com a isomorfia la definició associada a les cadenes i, en cas de parlar d'isomorfia de collars, simplement s'anomenarà rotació.

4.3 Senaritat dels ritmes

Si volem aprofundir més en l'anàlisi rítmica podríem parlar de la senaritat dels ritmes.

Definició: Es diu que un compàs és senar si aquest té un nombre parell de pulsacions i no hi ha dos atacs que el separin en dos semicompassos, és a dir, dos conjunts de la mateixa durada. O, dit d'una altra manera, que si es mesuren les distàncies del seu graf complet associat, mai apareixerà la distància $\frac{n}{2}$.

A la teoria és bastant senzill crear aquest tipus de compassos. Si simplement s'utilitzen k atacs de durada 1 amb $k < n/2$ s'obtindria un ritme amb aquesta propietat. Aquest mètode és conegut com l'algorisme caminant.

Per altra banda, a la música aquests ritmes no són tan habituals, tot i la simplicitat de la seva construcció.

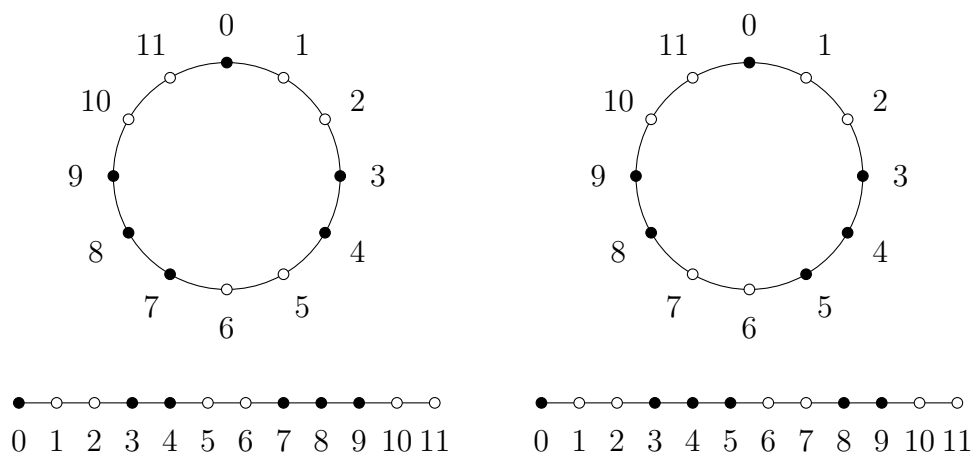


Figura 14: Collars no isomorfs però sí les seves cadenes

Com s'ha dit anteriorment, aquesta propietat no és molt freqüent als ritmes d'arreu del món però si més no, si que hi ha casos en els què interessa parlar d'una petita variació d'aquesta: la senaritat.

La senaritat d'un ritme ve donada per la quantitat de parelles d'atacs que divideixen el compàs en dos subcompassos o, dit d'una altra manera, el nombre de parelles de nodes amb distància $\frac{n}{2}$. Com menys parelles hi hagi, més senaritat tindrà. Així mateix donarem una definició extra:

Definició: Es diu que un compàs és perfectament parell quan està format per k atacs disposats de tal manera que aquests formen un polígon regular.

Aquesta adaptació ve motivada pels diferents ritmes trobats al llarg del continent africà, on tots els que s'esmentaran estan formats per 12 pulsacions, 7 atacs i el seu vector de distàncies està format únicament pels nombres 1 i 2. Aquests ritmes són els que es troben a la figura 15:

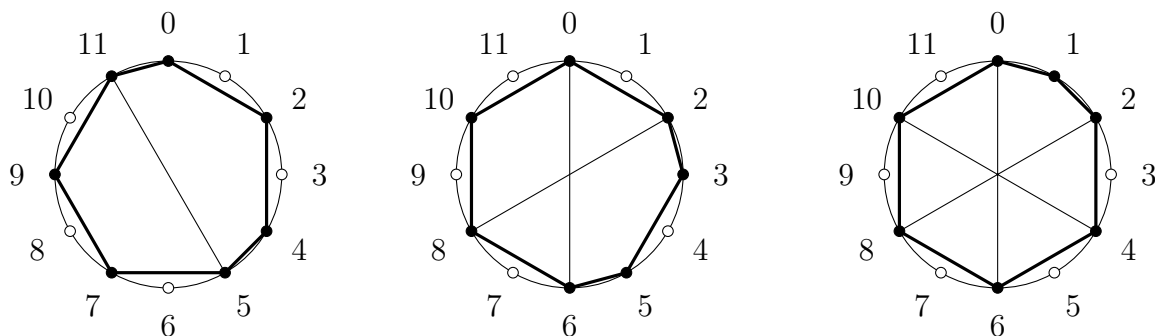


Figura 15: 3 ritmes amb 12 pulsacions i 7 atacs amb únicament distàncies 1 i 2

Com es pot observar, al primer (el bembé) únicament hi ha un parell de nodes amb distància $\frac{n}{2}$, al segon (la tonada) hi ha dos, mentre que al tercer (el sorsonet) hi ha tres.

Si es volguera donar una mesura numérica a la senaritat, una proposta podria ser

$s = -n$, on $n \in \mathbb{Z} \geq 0$ és el nombre de parelles de nodes amb distància $\frac{n}{2}$. Rebut així la senaritat zero els ritmes senars.

A continuació es presentarà un nou algorisme més útil que el caminant per tal d'obtenir ritmes senars. Com s'ha dit prèviament, una condició per tal que es pugui dur a terme aquest algorisme és que el nombre d'atacs sigui menor o igual que $\frac{n}{2}$. L'algorisme consisteix en el següent:

Donat un nombre n de pulsacions i un nombre a d'atacs i una distància de salt l , s'ubica el primer atac a la pulsació 0. En conseqüència, la posició $\frac{n}{2}$ quedarà descartada a l'hora de col·locar un futur atac. A continuació es selecciona la l -èsima pulsació, bloquejant així la $\frac{n}{2} + l$ i així successivament sempre que sigui possible fer un salt de l pulsacions. En cas contrari, es donarà un salt de longitud mínima per tal d'arribar a una posició que no estigui bloquejada. Es repetirà aquest procediment fins a haver ubicat els a atacs.

Aquest algorisme, més enllà de donar un compàs senar bastant més útil que l'anterior, si es tria convenientment el nombre d'atacs i la distància de salt, l'algorisme assegura que mai obtindrem una distància entre dos atacs igual o superior a $\frac{n}{2}$ pulsacions.

Mitjançant aquest algorisme i imposant 8 pulsacions, 3 atacs i longitud de salt $l = 3$ obtenim el compàs conegut com a treset cubà¹, un ritme molt popular en diversos estils musicals com el rock que es presenta a continuació.

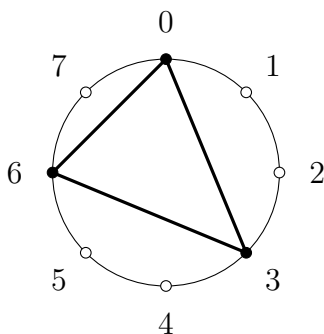


Figura 16: Treset cubà

4.4 Complexitat rítmica

Al capítol anterior ja es va introduir el concepte de complexitat, en el seu moment es va parlar de la complexitat d'una subdivisió. Ara es parlarà de la complexitat del ritme en sí.

Abans de donar una definició el més precisa possible de complexitat rítmica cal fer unes petites reflexions.

Cal distingir la complexitat de percepció de la d'execució. Els motius són evidents, per a una persona que escolta una peça musical li pot ser relativament senzill reconèixer que una nota és més aguda o més greu que una altra, però determinar l'interval de separació pot ser més difícil i, a més a més, reproduir el so exacte pot ser-ho encara més.

Una cosa semblant passa amb els ritmes. Per una banda es pot parlar de la complexitat de percebre un patró i per l'altra de la complexitat de tocar-lo.

¹Tot i que a la cultura occidental s'enté el treset com un conjunt de tres figures que tenen la mateixa durada que dues d'iguals com els que s'han vist al bolero de Ravel a la figura 3, els americans van batejar així aquest ritme.

És per aquest motiu que es donaran diverses mesures de complexitat rítmica i s'aniran enumerant els seus punts forts i febles.

4.4.1 Mesura de l'entropia

Una possible mesura de complexitat seria la predictibilitat d'un ritme. Suposant que es tenen dos casos diferents, en el primer, un ritme pot estar format per atacs de durada 2 o de durada 3 amb probabilitat 0,5 cadascun. Per altra banda, en el segon cas, tots els ritmes estan formats únicament per atacs de durada 2, pel que tindrà probabilitat 1. És fàcil determinar que la incertesa en el primer cas automàticament el classifica com a ritme més complex que el segon.

Formalitzant aquesta intuïció, si es considera que un compàs està format per atacs de k durades diferents d_1, \dots, d_k amb probabilitats associades p_1, \dots, p_k tal que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, aleshores es defineix l'entropia d'aquest compàs com la funció $E(C) = -\sum_{i=1}^k p_i \cdot \log p_i$. Que pren valor màxim quan es satisfà que $p_i = p_j \ \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$. Per a aquesta definició es poden triar tant les distàncies entre atacs adjacents com les del graf complet, ja que donaran una vista més ampla a l'hora de classificar els diferents ritmes i discutir respecte la seva complexitat.

Per donar un exemple, s'analitzaran ambdues entropies en els sis ritmes que s'han esmentat anteriorment:

	Bossa-nova	Shiko	Son	Rumba	Gahu	Soukous
Graf complet	1, 84	1, 84	2, 24	2, 44	2, 72	2, 72
Atacs adjacents	0, 72	0, 97	1, 52	1, 52	1, 52	1, 92

Que, si es representen gràficament sobre uns eixos de coordenades, s'obté la figura 17.

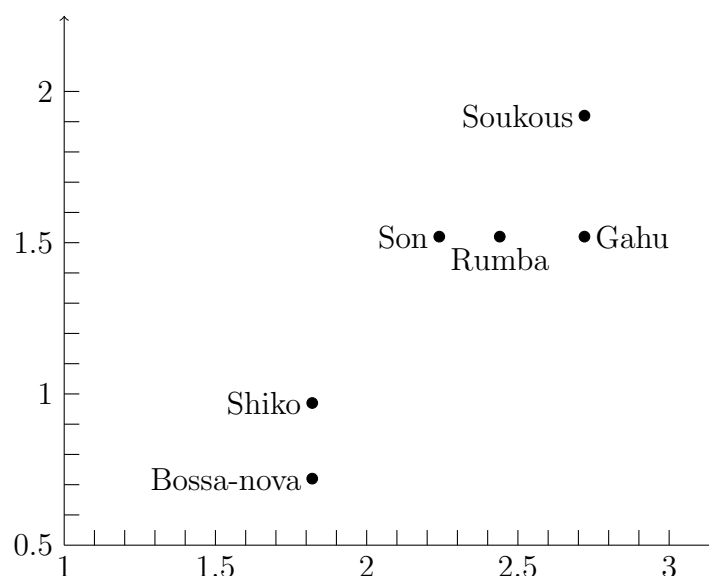


Figura 17: Representació de les entropies sobre eixos de coordenades

Aparentment, tot i que dona una informació bastant visual, no acaba de quedar del tot clara la magnitud d'aquestes diferències a l'entropia.

És per això que és important fer un estudi més exhaustiu de l'entropia d'un ritme abans de donar per vàlida la conclusió que un és més complex que un altre. Una opció podria ser definir una complexitat euclidiana que sigui la distància des de l'origen fins el punt amb coordenades les dues entropies respectivament, obtenint la següent fórmula:

$$c_e = \sqrt{(\text{entropia del graf complet})^2 + (\text{entropia entre atacs adjacents})^2} \quad (2)$$

Un inconvenient que es pot trobar a aquesta definició de mesura és que, en realitat la durada d'un atac no és mai una variable aleatòria (sempre que no s'estigui composant amb daus) i és per això que la manera més propera d'estudiar l'entropia seria amb la mostra i associant la probabilitat $p_i = \frac{N_i}{a}$ on N_i és el nombre de vegades que apareix l'atac amb durada associada d_i .

Com a exemple de ritmes amb característiques molt semblants però amb valor d'entropia diferent es considera el següent ritme plantejat pel músic Steve Reich:

Dues persones donen palmes seguint el següent patró rítmic: [XXX.XX.X.XX.]. El primer el toca repetidament tal com és, mentre que el segon també el toca, amb la modificació que es desplaça el patró una unitat de temps cada cop que aquest és repetit 12 vegades. La peça acaba quan ambdós participants tornen a tocar el patró a l'uníson.

Per què aquest patró i no qualsevol altre dels 495 possibles amb 12 pulsacions i 8 atacs? Perquè si s'afegeixen una sèrie de restriccions a aquests tipus de compassos quedaran únicament dues possibilitats que es veuran més endavant a la figura 20.

1. El compàs ha de començar amb un atac.
2. Els silencis entre dos atacs consecutius han de ser curts, és a dir, de durada 0 o 1.

Combinant les dues primeres restriccions es podrà omplir el compàs associant 8 de les 12 pulsacions a 4 elements [X] (una palmada) o bé 4 elements [X.] (una palmada i un silenci) Pel que es passarà a tenir $\binom{8}{4} = 70$ possibles compassos.

3. Dels 70 que romanen, s'eliminaran aquells que siguin isomorfs entre ells i quedara únicament un dels seus representants. Per exemple, dels dos ritmes que es veuen a la figura 18, es descartara el de sota i es pren com a representant el de dalt.

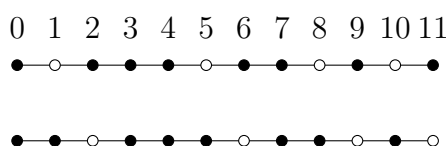


Figura 18: Dos ritmes isomorfs

La qual cosa deixarà un total de 10 possibilitats que es mostra a la figura 19:

4. S'imposa que fins que no s'hagi completat el cicle de 12 pulsacions, en cap moment els dos intèrprets estaran tocant el mateix compàs. És a dir, s'ometran aquells que siguin invariants per alguna rotació. Descartant així els compassos 8, que és invariant per una rotació de 4 pulsacions en sentit horari, i 10, que és invariant per qualsevol rotació de $3n$ pulsacions.

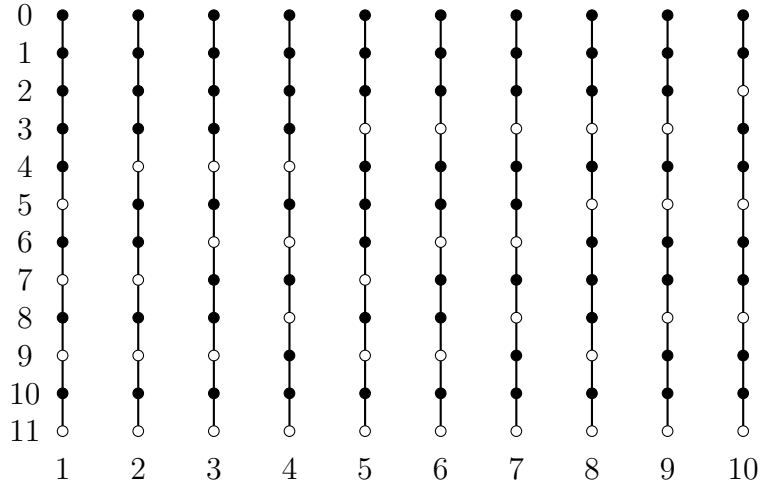


Figura 19: Les deu possibilitats restants

5. No es permetrà que hi hagi dos patrons de palmes iguals consecutius. Per exemple, al compàs 1, el subpatró [X-X-X-X-] no estaria permès ja que, per exemple, [X-X-X-X-] = [X-X-] [X-X-]. Pel que únicament en quedaran dos.

L'altre ritme que també compleix aquestes propietats és el número 3, que va ser "descobert" pel músic Joel Haak.

Per construir una idea de la diferència entre aquests dos, s'analitzen les seves entropies. Per tal d'això es representaran gràficament:

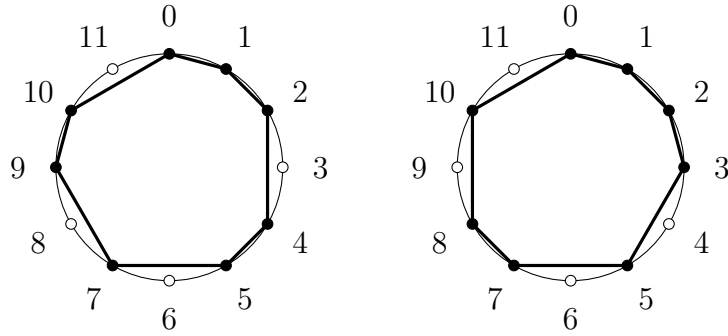


Figura 20: Ritmes de Reich (esquerra) i Haak (dreta)

Així s'obtenen les taules mostrades a 21:

A continuació, C_1 farà referència al compàs de Reich i C_2 al de Haak.

Així cadascú té entropia:

$$\begin{cases} H(C_1) = 2,513 \\ H(C_2) = 2,49 \end{cases} \quad (3)$$

Pel que tal com s'ha vist fins ara, s'hauria de triar el segon. Però més enllà de l'entropia tenen una sèrie de semblances i diferències que és interessant esmentar.

La simetria de C_1 la marca la línia que uneix les dues pulsacions antipodals (1, 7), mentre que la simetria de C_2 la marca la recta que bisecciona l'aresta entre (1, 2) i (7, 8).

Distància	Repeticions	Distància	Repeticions
1	4	1	4
2	5	2	6
3	6	3	5
4	5	4	4
5	6	5	7
6	2	6	2

Figura 21: Taules amb el nombre de vegades que es repeteix cada distància entre els diferents atacs del ritme de Reich (esquerra) i el de Haak (dreta)

Ambdós tenen senaritat -2 . Els dos atacs antipodals de C_1 són les parelles de nodes $(1, 7)$ i $(4, 10)$ mentre que a C_2 són les parelles de nodes $(1, 7)$ i $(2, 8)$. La diferència més significativa en aquest fet és que tot i tenir la mateixa senaritat, a C_1 les rectes esmentades són ortogonals entre elles, mentre que les de C_2 no.

4.4.2 Mesura geomètrica

Un altre criteri per mesurar la complexitat rítmica d'un compàs seria mitjançant una comparativa directa amb el que seria un ritme perfectament parell del mateix nombre de pulsacions i atacs. Així, un ritme perfectament parell de 12 pulsacion seria el següent:

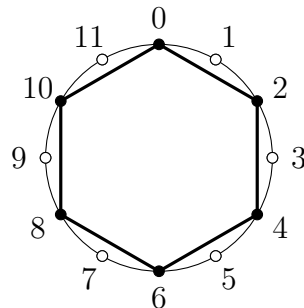


Figura 22: Exemple de ritme perfectament parell

S'ha triat convenientment el compàs regular de 6 atacs, ja que serà de major utilitat a l'hora de calcular la nova mesura de complexitat en aquest cas.

Així, si es dibuixen les següents gràfiques superposant cadascun dels ritmes presentats sobre el ritme perfectament parell com es fa a la figura 23 i es computa l'àrea compresa entre ambdues gràfiques, s'obté que el que té àrea menor és C_1 i es pot dir que és més semblant a un compàs regular.

4.4.3 Mesura Lempel-Ziv

Una nova mesura de complexitat va ser proposada per Abraham Lempel i Jacob Ziv l'any 1976 que proposa una mesura teòrica d'informació empírica d'una seqüència finita de símbols, en el context de comprensió de dades. L'objectiu és emmagatzemar una

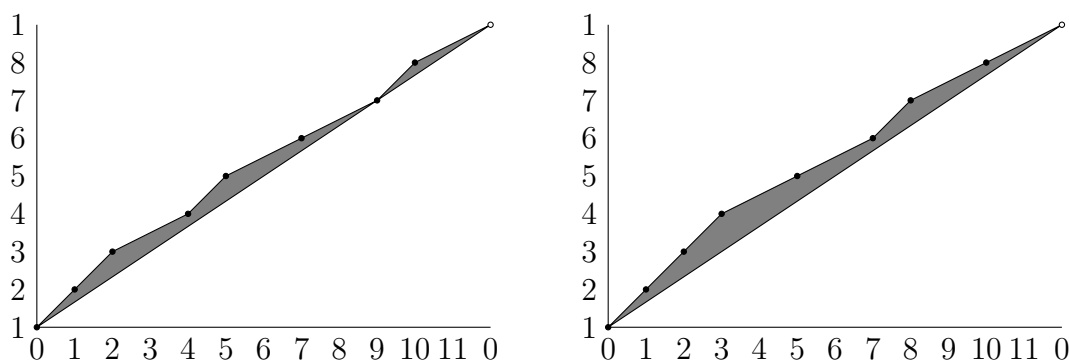


Figura 23: Àrea entre la localització dels atacs dels ritmes de Reich (esquerra) i Haak (dreta) i un ritme perfectament parell

seqüència de símbols de manera que s'utilitzi el mínim espai de memòria possible. El procediment consisteix a escanejar una seqüència finita d'esquerra a dreta buscant les subsequències o patrons més curts que encara no han sigut trobats durant l'escaneig. Cada cop que es troba un nou patró, s'introdueix a un diccionari. Un cop s'hagi acabat de recórrer la seqüència, la complexitat d'aquesta serà el nombre d'elements que conté el nostre diccionari. En el cas de seqüències cícliques com és el cas dels ritmes, es concatenarà el ritme un compàs més. Aquesta mesura és coneguda com la mesura de Lempel-Ziv.

Un cop es va publicar aquest concepte de mesura, ha sigut modificat per diferents persones tant per millorar-la com per simplificar-la. Una variant d'aquesta mesura seria la següent.

Es considera un compàs expressat de forma binària amb 0s i 1s, on un 0 representa un silenci i un 1 un atac. Es concatenen dues còpies d'aquest compàs, formant així una paraula de $2n$ lletres. Es començarà a recórrer la paraula a la pulsació 0 i es considerarà que una subsequència és nova si aquesta no ha aparegut anteriorment. En conseqüència, la subsequència que es troba a la pulsació 0 serà nova. A continuació, s'avança una pulsació i s'analitza. Si és diferent de la pulsació 0 s'obtindrà una nova subsequència, si és igual, es concatenarà amb la següent fins trobar un patró diferent.

A continuació es dona un exemple on s'analitzarà la complexitat Lempel-Ziv del son.

Exemple: Com ja s'ha dit anteriorment, el son segueix el següent patró: $[X..X..X...X.X...]$.

Ara es concatenen dos compassos d'aquest ritme. Per facilitar la comprensió, es presentaran amb boles blanques i negres a la figura 24.

A continuació, s'inicia l'algorisme. S'observa que la pulsació 0 té un atac, per tant, es procedeix a guardar aquesta subsequència al nostre diccionari. La següent pulsació és un silenci. Com fins ara no ha aparegut cap, es torna a guardar aquesta subsequència al diccionari, tenint fins ara dos elements diferents. La següent pulsació conté un altre silenci, com que ja existeix aquesta subsequència emmagatzemada, es concatena amb la següent, que és un atac. Aquesta nova subsequència de dos elements no ha aparegut prèviament, per tant es torna a afegir al nostre diccionari, obtenint així un total de 3 subsequències. Es segueix avançant a la posició 5. Com que és un silenci i aquest ja ha aparegut, es continuen concatenant pulsacions fins la número 7, on s'obté la quarta cadena, i així mateix s'obté una formada des de la pulsació 8 fins la 12 i una última

formada des de la pulsació 13 fins la 18. Que dóna lloc a un diccionari de mida 6 amb aquests patrons:

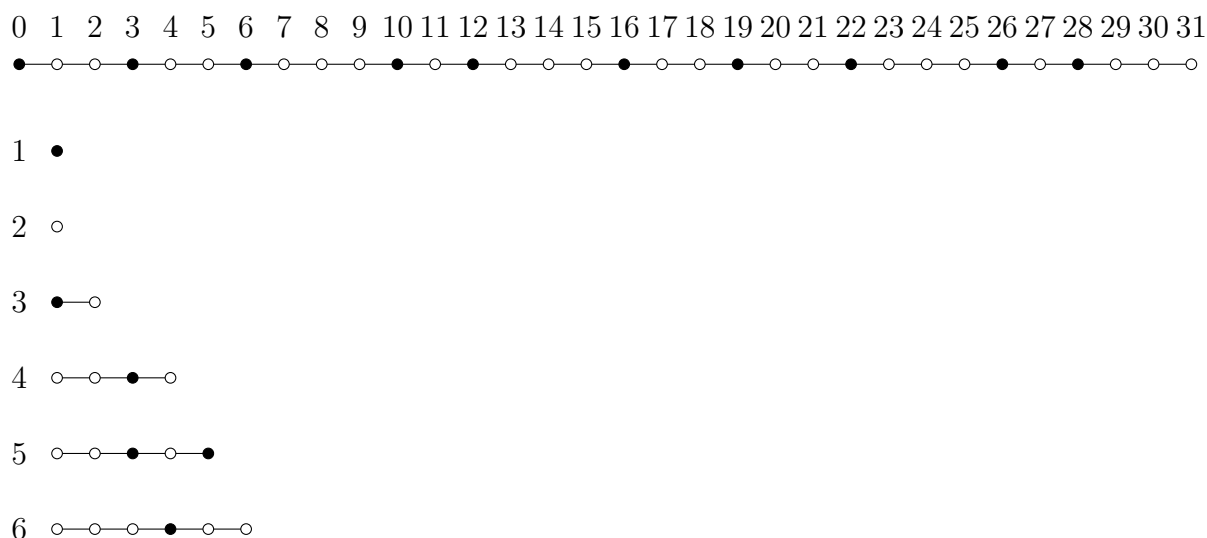


Figura 24: Diccionari Lempel-Ziv pel son

Un inconvenient d'aquesta mesura és que si comparem totes les dels sis ritmes principals, observem que cinc d'ells tenen complexitat 6 i el Bossa-nova és l'únic que en té 5 i a més, no acaba de quedar del tot clar l'impacte que té aquesta diferència de complexitat.

4.4.4 Complexitat cognitiva

Aquesta mesura va ser proposada per Jeff Pressing, i està basada tant en factors psicològics de la percepció, com en principis musicològics com la quantitat de síncopa present. Aquesta mesura dona un valor numèric a possibles patrons de n pulsacions i d'entre 1 i a atacs. S'observa que s'obté un total de $\sum_{k=1}^a \binom{n}{k}$ patrons possibles, als quals s'assignaran diferents valors numèrics. Per a patrons més llargs, simplement se subdividirà el compàs en subpatrons de mida n i després, se sumaran les complexitats cognitives associades a cada subpatró.

Per exemple, si es prenen els patrons de 4 pulsacions que contenen 1 o 2 atacs, es tenen 10 possibilitats (4 amb un atac i 6 amb 2). Els quals seran:

●—○—○—○	0	●—○—●—○	1
●—●—○—○	2, 5	●—○—○—●	4, 5
○—○—●—○	5	○—○—●—●	5, 5
○—●—●—○	6, 5	○—●—○—○	7, 5
○—○—○—●	7, 5	○—●—○—●	10

Considerant aquesta mesura, sorgeix un inconvenient que cal tenir en compte. Aquest valor numèric pot ser en certa manera subjectiu o, en qualsevol cas, tenir absència de rigor matemàtic ja que no estableix el criteri amb què s'ha assignat cada valor a cada patró. I, en cas que aquesta assignació fós universal, caldria un document on estiguessin recollides totes les mesures de tots els diferents possibles patrons de n pulsacions i a atacs

o, almenys, tots els possibles patrons amb nombre de pulsacions 2, 3 i 4 i amb tots els seus possibles atacs.

4.4.5 Irregularitat i l'índex de la variabilitat per parelles normalitzada

Aquesta mesura associa la complexitat a la irregularitat de les duracions entre els atacs del compàs. Una manera de mesurar aquesta irregularitat és mesurar la distància entre el ritme que es vol analitzar i un altre perfectament parell, semblant a la complexitat geomètrica. Donat que en casos com és el dels ritmes, la relació d'ordre entre els intervals adjacents és importat i paràmetres com ara la desviació estàndar les menysprea, cal una que tingui en consideració la presència d'aquests canvis locals. Aquesta mesura que s'anomenarà nPVI és sensible a aquests canvis i ve definida per la següent expressió:

$$\frac{100}{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \left| \frac{d_k - d_{k+1}}{(d_k + d_{k+1})/2} \right| \quad (4)$$

On m és el nombre de distàncies entre atacs adjacents i d_k és la durada del k -èssim interval.

A continuació es presenta una taula on es calculen totes les diferents complexitats proposades dels 6 ritmes principals.

	Pressing	Lempel-Ziv	Entropia adjacent	Entropia completa	nPVI
shiko	6	6	0,97	1,84	66,7
son	14,5	6	1,52	2,24	70,5
Soukous	15	17	19,5	2,72	23,8
Rumba	19,5	6	1,52	2,44	23,8
Gahu	19,5	6	1,52	2,72	23,8
Bossa-nova	22	5	0,72	1,84	14,3

Figura 25: Els 6 ritmes afrocubans i els seus valors de les diferents complexitats

Aquesta comparativa, lamentablement segueix deixant molts fronts oberts, ja que no es pot determinar quina mesura (o combinació d'aquestes) dona una millor determinació de quins ritmes són més complexos que d'altres perquè, fins i tot, algunes mesures es contradiuen. Però, tot i això, aporta una gran quantitat d'informació molt útil.

5 Casuística dels ritmes

Al llarg d'aquest capítol centrat en l'obra de [Tou] i [Jad], s'analitzarà i es donarà nom a alguns ritmes amb propietats interessants que s'han vist al llarg del treball com ara el treset cubà i altres de nous que es veuran més endavant com el paradiddle i finalment es donaran certes metodologies per tal de calificar la similitud de dos ritmes entre ells.

5.1 Ritmes perfectament parells

A continuació s'analitzarà un problema matemàtic bastant conegut. Aquest consisteix en el següent: es vol col·locar un nombre k d'elements en una línia recta amb n possibles caselles. Per $k = 2$ és evident que col·locar-los cadascun a les dues caselles més allunyades és la millor opció possible. Un cop ubicats, si es volgués afegir un tercer no importaria la posició que es triï, ja que es satisfà que $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$. Per tant, la suma de distàncies total serà de $2d(A, B)$, independentment d'on es col·loqui l'element C . Ara el problema ve quan es vol col·locar un element D , que té per solució òptima col·locar dos elements (per exemple A i D) a les dues caselles que siguin més properes a un dels dos extrems i els altres dos elements (B i C) el més proper possible a l'altre extrem. Aquest procediment es seguiria repetint tantes vegades com elements a col·locar es tinguin.

Aquest problema en una línia recta no té molt de misteri. Si més no, és una mica més interessant quan s'identifiquen els dos extrems de la recta i es té un cicle tancat, com seria el cas dels ritmes.

La definició donada al capítol anterior de ritmes perfectament parells ve motivada per aquest problema, on s'haurà de maximitzar la suma de les longituds dels arcs (de longitud mínima) que uneixen cada parella d'elements. Però aquest problema també induïx la contrapart d'aquesta definició, que és la següent.

Definició: Es diu que un ritme és perfectament no parell quan els seus atacs minimitzen la suma de les seves distàncies.

S'observa que l'algorisme per generar aquest tipus de ritmes és exactament el mateix que l'algorisme caminant presentat anteriorment.

A l'hora de mesurar les distàncies entre els atacs dels ritmes és important no utilitzar la definició de la longitud d'arc, ja que, com que es tenen polígons tancats convexos, la suma d'aquestes longituds d'arcs serà sempre 2π pels atacs adjacents (suposant que el ritme està superposat sobre una circumferència de radi 1 per eliminar constants) i, si s'analitza el graf complet, s'obtindrà una longitud d'arc de $k\pi$ per algun $k \in \mathbb{N}$.

Per entendre millor aquesta mesura, cal introduir un nou concepte, el balanç.

Definició: Donat un ritme amb n pulsacions i a atacs representat de manera geomètrica sobre una circumferència, es dibuixa una línia recta r que passi pel centre de la circumferència. Ara, per qualsevol rotació d'angle α respecte el centre on r no contingui cap atac s'haurà dividit la circumferència en dues parts iguals de manera que cada atac pertanyerà únicament a una de les dues semicircumferències. Si el nombre d'atacs que pertanyen a una semicircumferència difereix en 0 o 1 del de l'altra, es dirà que aquest ritme està balancejat.

Aquesta definició planteja un problema i és que, com es veurà al següent exemple, dos ritmes on un és clarament més proper a ser un ritme parell que l'altre, comparteixen el fet d'estar balancejats.

Una altra manera de mesurar la paritat d'un ritme és mesurant la distància en línia

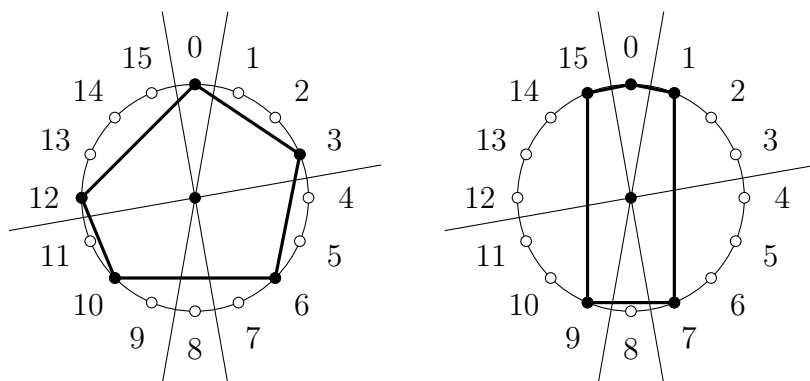


Figura 26: Exemples de dos ritmes balancejats

recta que separa dos atacs, transformant un problema unidimensional en un bidimensional. Musicalment no acabaria de tenir sentit però matemàticament, aquesta nova mesura no trenca l'esquema del problema i permet definir un valor de paritat millor que l'obtingut per la longitud d'arc.

Toussaint fa una referència a l'obra de [Tót], qui va demostrar que, donats k punts sobre un cercle, la suma de totes les seves distàncies és màxima si i només si els punts formen un polígon regular de k costats.

Malauradament, donat un ritme de n pulsacions i a atacs, només es pot construir un polígon regular si a és divisor de n . Altrament, es parlarà de ritmes maximalment parells, que seran aquells tals que la suma de les seves distàncies sigui el més propera possible a la del perfectament parell. Un mètode per tal d'obtenir un ritme maximalment parell seria el plantejat a la secció 4.1.1, en la que es va parlar de la binarització d'un ritme ternari, on s'assignava com a nova localització d'un atac la posició disponible més propera a aquest. Així, un ritme maximalment parell de 12 pulsacions i 5 atacs seria el següent:

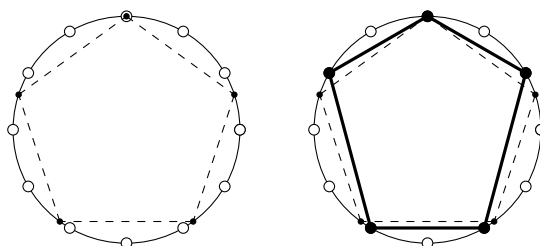


Figura 27: Construcció d'un compàs maximalment parell

5.2 Ritmes euclidians

En aquesta secció s'utilitzarà una aplicació del conegut algorisme d'Euclides per l'elaboració de ritmes que s'anomenaran ritmes euclidians.

L'algorisme d'Euclides per trobar el màxim comú divisor entre dos nombres a i b consisteix a aplicar recursivament el següent procediment: es pren el valor del residu de

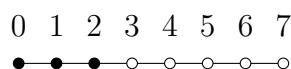
dividir el nombre més gran (b) pel més petit (a), es substitueix b per aquest resultat fins que el residu sigui igual a 0. Un cop arribat a aquest punt, el màxim comú divisor serà el divisor de l'última iteració.

Exemple: Es trobarà el màxim comú divisor de 5 i 8 mitjançant aquest algorisme. Es té la parella (5, 8) es calcula el residu de dividir 8 entre 5 $r = 3$. Ara es té la parella (3, 5). Es continua iterant i s'obtenen les següents parelles: (2, 3) i (2, 1), com que el residu de dividir 2 entre 1 és 0, es conclou que el màxim comú divisor de 5 i 8 és 1.

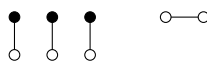
Ara la qüestió és, com s'aplica per generar ritmes?

La manera serà la següent: Un cop triats els nombres n i a , es representaran mitjançant una concatenació de boles. Primer es dibuixaran a boles negres per representar els atacs i a continuació $n - a$ boles blanques per representar els silencis. S'extreu un nombre $c = \min a, n - a$ boles blanques del final del nostre vector i es reubiquen sota les c primeres. Tenint així una alçada de 2 unitats i una amplada de $n - c$ unitats. Se segueix aplicant aquest procediment prenent ara com a valor de a l'amplada de la darrera fila del nostre diagrama fins que únicament quedi una columna amb alçada diferent a la resta. Finalment, se separen les columnes i es col·loquen en ordre de manera horitzontal i es concatenen. Obtenint així el ritme dessitjat.

Exemple: Es considera un compàs amb 8 pulsacions i 3 atacs. A continuació, s'elabora un diagrama de boles on les tres primeres seran negres i les 5 restants blanques (representant atacs i silencis respectivament) com es mostra a continuació i s'aplicarà l'algorisme d'Euclides per generar el ritme.



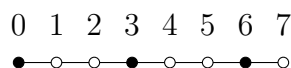
Es prenen 3 silencis i es col·loquen sota els 3 primers atacs:



Com que només queden dos silencis a la cua, es col·loquen sota les dues primeres columnes, obtenint així



Que si s'escriu en horitzontal i concantenant-les, s'obté un ritme que ja ha aparegut anteriorment que és el treset cubà, representat amb la cadena



Ara que s'ha mostrat l'algorisme d'elaboració d'un ritme euclidià, es pot donar la seva definició:

Definició: Es diu que un ritme és euclidià si aquest es pot generar utilitzant l'algorisme d'Euclides.

5.3 Ritmes complementaris

Abans de començar aquesta secció, cal detenir-se a mirar aquesta imatge:

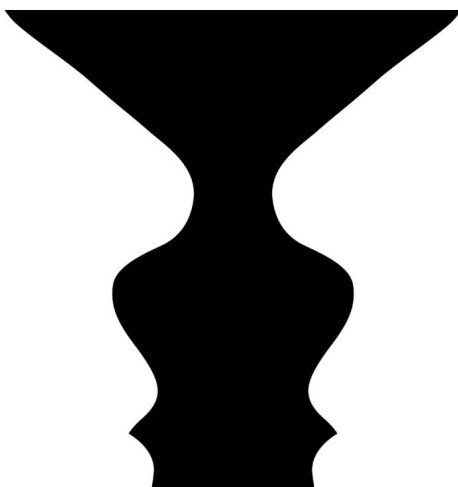


Figura 28: No tot és el que es percep a primera vista (imatge treta de Google)

A primera vista, s'observa la figura pintada de color negre però, en algun moment, el nostre cervell ens farà percebre també dues cares a punt de besar-se. A més a més, fins i tot dibuixarà unes línies imaginàries que delimitaran la imatge.

Una cosa semblant ocorre amb els ritmes. Es consideren els dos següents ritmes:

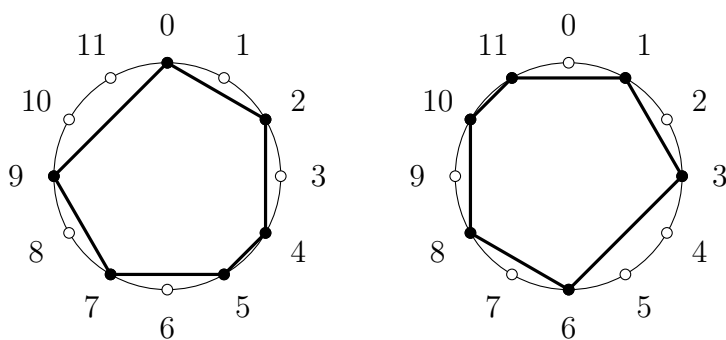


Figura 29: Ritmes complementaris

Com es pot observar, un és la contrapart de l'altre, també conegut com el seu complementari ja que, si es toquen simultàniament, en cap moment donaran un atac al mateix temps i a més, en cap moment es donarà un silenci.

Un fenomen interessant d'aquest exemple és que el de la dreta és una rotació del primer de 6 pulsacions (ja sigui en sentit horari com antihorari). A més, si es toquen en dos tambors amb el mateix volum, farà que l'oient deixi de percebre quin dels dos està interpretant cada ritme.

Definició: Quan un compàs i el seu complementari tenen el mateix histograma de distàncies es diu que aquests són homomètrics.

Un compàs amb n pulsacions i $n/2$ atacs no sempre serà una rotació del seu complementari, la següent imatge ho demostra.

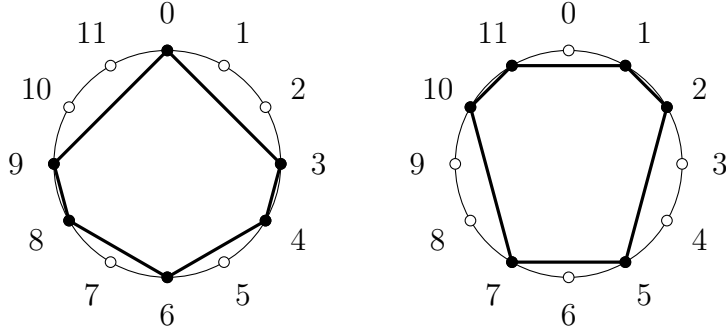


Figura 30: Ritmes complementaris no isomorfs entre ells

On s'observa que dos ritmes són complementaris però que no són isomorfs entre ells. Si més no, comparteixen el mateix histograma de distàncies.

El fet que tinguin el mateix histograma de distàncies va donar lloc al següent resultat conegut com a teorema hexacordal degut a que va ser demostrat en el context dels intervals dels acords en una escala de 12 tons.

Teorema hexacordal: Els ritmes amb n pulsacions i $n/2$ atacs i el seu complementari sempre tindran el mateix histograma de distàncies.

Demostració: Donat un compàs de n pulsacions, s'atribueix un atac a cada pulsació i es faran desplaçaments entre aquestes amb salts de mida $l \leq \frac{n}{2}$. Sempre que l i n no siguin relativament primers es tindrà més d'un cicle disjunt. S'observa que per qualsevol longitud l hi ha exactament n salts. A continuació es considera el cas en que no totes les pulsacions contenen un atac, pel que es tindran a atacs i $s = n - a$ silencis. Donada una distància $d = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, es defineixen els següents valors N_{ss}, N_{aa} i $N_{as} = N_{sa}$ que representen el nombre d'elements a distància l de dos silencis, dos atacs i un atac i un silenci (i viceversa) respectivament. La qual cosa deixa aquest resultat:

$$\begin{aligned} a &= N_{aa} + \frac{1}{2}N_{as} \\ s &= N_{ss} + \frac{1}{2}N_{as} \end{aligned} \tag{5}$$

Com es veu a continuació, quan totes les pulsacions són atacs es té que $N_{aa} = n$ i $N_{ss} = N_{as} = 0$, que satisfà $a + s = n$. A continuació es considera que es substitueix un atac qualsevol per un silenci, d'aquesta manera es tindrà que $N_{aa} = n - 2$ i, en el seu lloc s'obtindrà que $N_{as} = 2$, anàlogament en el cas que es tinguin totes les pulsacions amb silencis i es canviï una qualsevol per un atac.

S'estudien ara les altres possibles situacions: asa i ass . Si es substitueix la pulsació del mig, $N'_{aa} = N_{aa} + 2$ i $N'_{sa} = N_{sa} - 2$ en el primer cas i $N'_{aa} = N_{aa} + 1$, $N'_{ss} = N_{ss} - 1$ i N_{as} es manté igual. D'aquesta casuística es dedueix que no importa quantes pulsacions es canviïn ja que sempre es mantindrà la relació establerta a (5).

Finalment, com que es vol imposar que $a = s$ i com que s'ha vist que (5) és cert, es té la següent equació:

$$N_{aa} + \frac{1}{2}N_{as} = N_{ss} + \frac{1}{2}N_{as}$$

Com que N_{as} es cancel·len mútuament, s'obté que $N_{aa} = N_{ss}$, és a dir, per una distància d , el nombre de vegades que aquesta apareix al nostre ritme sempre serà igual al nombre de vegades que apareixerà al seu complementari, d'on es dedueix que ambdós ritmes tindran el mateix histograma de distàncies. \square

5.4 Ritmes plans

Prèviament s'ha parlat dels ritmes perfectament i maximalment parells, a continuació s'estudiarà el cas en què cap distància apareix més d'una vegada. Igual que s'ha fet anteriorment primer s'analitzarà el cas més senzill, que és el de la cadena i posteriorment el del collar.

Donada una línia recta dividida en n parts iguals, es volen col·locar k elements tal que es satisfaci $d_i \neq d_j \forall i, j \in \{1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$. Evidentment això no serà possible per qualsevol combinació de n i k però és important considerar els casos on sí que es pot construir.

Per exemple, es considera la següent cadena:

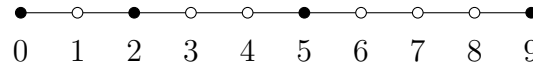


Figura 31: Totes les distàncies apareixen únicament una vegada

S'observa que entre totes les 4 boles negres les distàncies són $d_{0,2} = 2, d_{0,5} = 5, d_{0,9} = 9, d_{2,5} = 3, d_{2,9} = 7, d_{5,9} = 4$ que, com s'ha dit, cap d'aquestes està repetida.

La construcció d'aquest tipus de cadenes és coneguda com la Regla de Golomb perquè aquest problema es va fer popular gràcies al matemàtic Solomon W. Golomb, tot i que el primer a estudiar-les va ser Simon Sidon.

A més, es diu que una Regla de Golomb amb k boles negres és òptima si no existeix cap altra Regla de Golomb amb k boles negres que sigui més curta. A més, si se satisfà que el nombre total de distàncies és n i que $d_i = i \forall i \in 1, \dots, n$ es diu que aquesta Regla de Golomb és perfecta.

Exemple: Un exemple de Regla de Golomb perfecta és el següent:

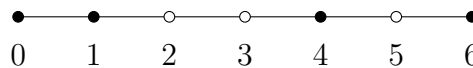


Figura 32: Regla de Golomb perfecta amb 4 boles negres

On $d_{0,1} = 1, d_{0,4} = 4, d_{0,6} = 6, d_{1,4} = 3, d_{1,6} = 5, d_{4,6} = 2$

La construcció de cadenes òptimes no és un procés trivial i, a hores d'ara s'han trobat únicament fins a $k = 27$, aquelles amb $k = 28$ encara s'estan computant. Si més no, els matemàtics Paul Erdős i i Pál Turán van demostrar que per tot nombre primer p diferent de 2, una Regla de Golomb amb p boles negres podria construir-se seguint el següent algorisme: es col·locarà cada bola negra a la posició $2pk + (k^2 \bmod p)$ per $k = 0, \dots, p-1$, aquest algorisme no té per què aportar una Regla de Golomb òptima, ja que, per exemple,

per $p = 5$ proporciona 10 distàncies diferents que són 7, 10, 11, 13, 17, 23, 24, 30, 31 i 41 però per $p = 5$ existeixen altres de més curtes.

Existeix un altre problema relacionat i és el de l'existència d'altres cadenes que, amb diferent disposició d'un cert nombre de boles negres, donen el mateix conjunt de distàncies. En l'àmbit de la computació aquest problema és conegut com el problema de la cabina de peatge. Un exemple de dues cadenes homomètriques és el següent:

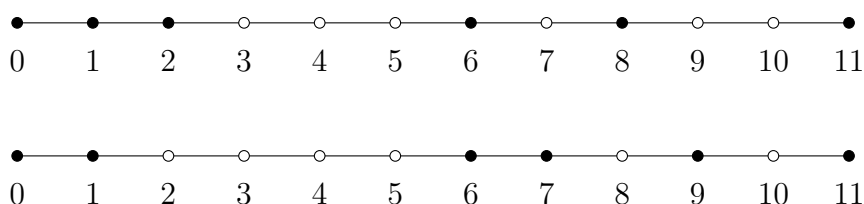


Figura 33: Dues cadenes homomètriques

Clarament es pot observar que aquestes no són Regles de Golomb, ja que, per exemple, en totes dues cadenes la distància 1 apareix dues vegades però de totes maneres aquestes cadenes, conegudes com a cadenes completes, tenen una propietat interessant i és que mesuren totes les distàncies possibles entre 1 i 11. També es van definir les mínimes cadenes completes com aquelles que deixen de ser una cadena completa si s'elimina una bola negra.

A continuació s'estudiaran aquests casos en què s'identifiquen els dos extrems de la cadena i s'obté un cicle, com s'ha fet en anteriors ocasions.

L'objectiu és trobar un ritme on totes les distàncies entre els atacs, siguin adjacents o no, només apareguin una vegada, és a dir, el seu histograma de distàncies tindrà alçada 1. És per això que a aquest tipus de ritmes s'anomenaran ritmes plans.

Per a un nombre d'atacs $a = 3$ és molt fàcil crear ritmes plans, ja que únicament es tindran 3 distàncies i simplement s'haurà d'imposar que el triangle sigui escalè. Es veu que aquest tipus d'histograma també és molt freqüent en l'harmonia, ja que els acords majors (formats pel vector de distàncies [4-3-5]) satisfan aquesta propietat.

Com és lògic, la dificultat de generar ritmes plans augmenta a mesura que augmenta el nombre d'atacs.

Així com hi ha Regles de Golomb perfectes, un podria sospitar que també deu haver-hi ritmes plans perfectes, que seran aquells on apareguin totes les distàncies entre 1 i la meitat del seu nombre de pulsacions $\frac{n}{2}$.

Efectivament existeixen i a continuació es mostraran dos exemples de ritmes plans perfectes amb 4 atacs i 12 pulsacions.

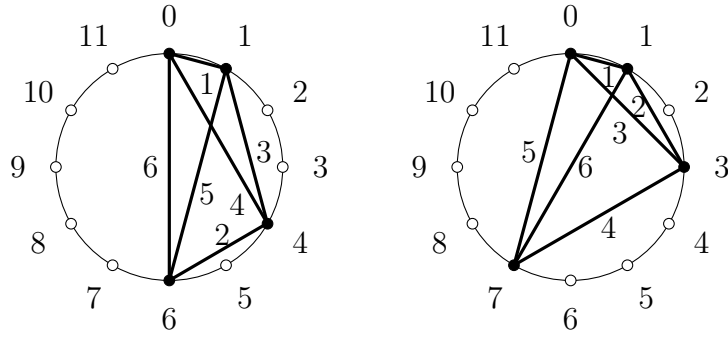


Figura 34: Ritmes plans perfectes

Ambdós ritmes no són isomorfs però tots dos satisfan les següents propietats: tots dos són perfectes, homomètrics i de mínima completesa. Aquest fet dóna lloc al següent resultat.

Teorema: Els dos ritmes proposats a la figura 34 són els únics ritmes no isomorfs que satisfan ser perfectes, homomètrics i de mínima completesa.

Demostració: Primer, com que el nombre de pulsacions és 12 la distància màxima que es pot obtenir serà 6, motiu pel que no pot haver-hi un número diferent de parelles d'atacs. És per això que el nombre d'atacs a ha de ser 4, ja que és l'únic que satisfà $\frac{a \cdot (a-1)}{2} = 6$. A continuació s'estudiaran dos casos diferents:

Primer es considera que existeix una diagonal que connecta dos punts a distància 6. Sense pèrdua de generalitat, es fa que aquesta connecti les pulsacions 0 i 6. Per tant, es tenen 8 maneres diferents de construir el quadrilàter, ja que cada atac restant haurà d'estar a una de les dues meitats, satisfent que la suma dels dos costats sigui 6. Com es pot veure a la figura 35, els quatre ritmes proposats a la primera fila són rotacions o reflexions del primer, pel que són isomorfs i només es considerarà un representant. Pel que fa als quatre de la segona fila, es veu que aquests no contenen la distància 3 i, a més, la distància 5 apareix dos cops, pel que es descarten tots quatre.

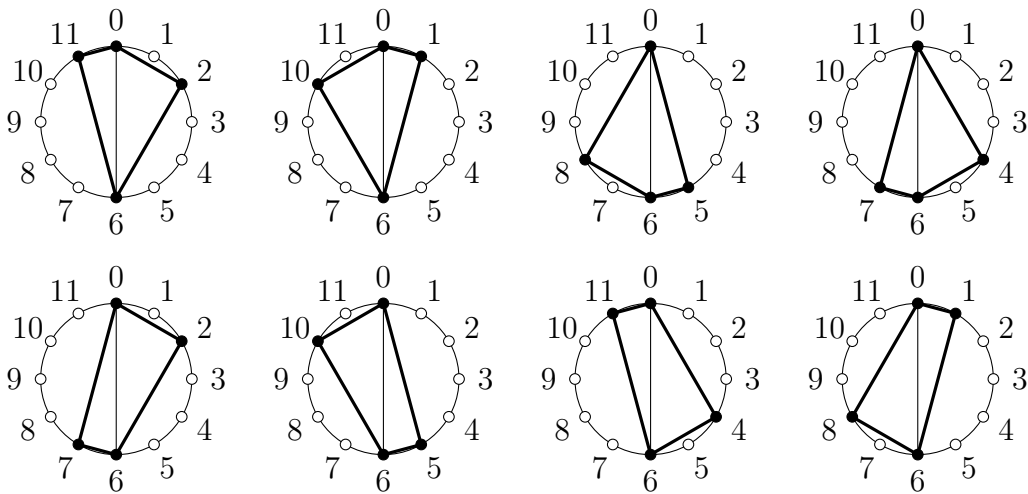


Figura 35: els 8 diferents ritmes on la diagonal uneix (0,6)

Per altra banda, considerem que la longitud 6 es troba en un dels costats del quadrilàter. Aquesta condició fa que la resta de costats d'aquest hagin de tenir longituds 1, 2 i 3. Així, únicament es disposa de 6 possibilitats que es veuran a la figura 36. D'aquestes s'extreu que si es troba un atac a la pulsació 3, la distància tres apareix dues vegades, pel que els quatre casos on això succeeix queden descartats. Pel que fa als dos ritmes de l'última columna, s'observa que un és la reflexió de l'altre, pel que es triarà únicament un representant. Obtenint així només dos possibles ritmes no isomorfs que satisfan aquestes propietats. \square

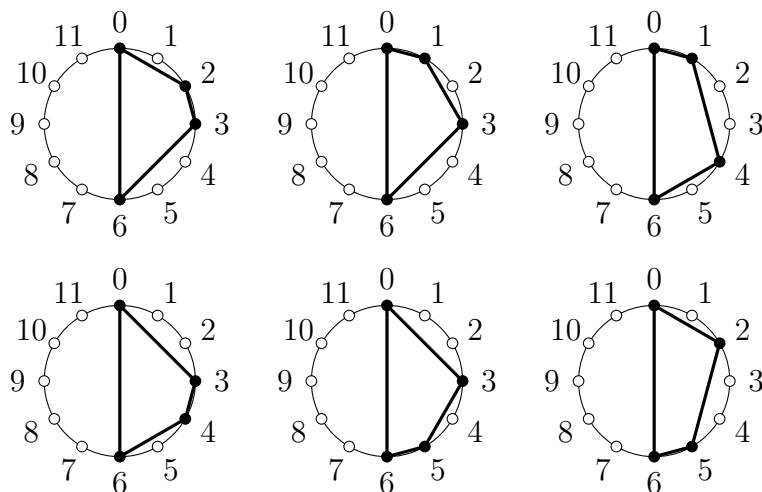


Figura 36: els 6 diferents ritmes on un costat té longitud 6

5.5 Ritmes profunds

El matemàtic Paul Erdős no només va contribuir en resultats aplicables a la música en el cas que s'ha explicat en l'apartat anterior. Va realitzar altres estudis amb gran fonament matemàtic que van tenir gran impacte. Per exemple, va plantejar el problema de si es poden triar n punts en el pla de manera que no hi hagi cap conjunt de 3 punts sobre una mateixa recta ni cap conjunt de 4 punts sobre una mateixa circumferència tal que per tot $i = 1, 2, \dots, n - 1$, hi ha una distància determinada per parelles d'aquests punts que es repeteix exactament i vegades. És a dir, cada distància que separa dos punts es pot trobar un nombre únic de vegades. Els conjunts on això es satisfà s'anomenen conjunts profunds.

El motiu pel qual va imposar que els diferents conjunts de punts no podien pertànyer a una mateixa recta o circumferència és que si això estigués permès, el problema seria massa senzill. Per exemple, es consideren n punts separats a distància 1 sobre una mateixa recta, aleshores la distància 1 apareixerà $n - 1$ vegades, la distància 2 apareixerà $n - 2$ i així successivament fins que la distància n apareixerà una sola vegada.

Anàlogament ocorre el mateix si es prenen un nombre a d'atacs sobre un ritme amb un nombre de pulsacions major o igual a $2a$, tots ells a distància 1. A la figura 37 s'exemplifica el que s'acaba de dir:

Tot i això, com hem fet fins ara, els ritmes es representen sobre una circumferència, pel que s'ometrà aquesta restricció i traslladarem l'anterior problema bidimensional a un unidimensional.

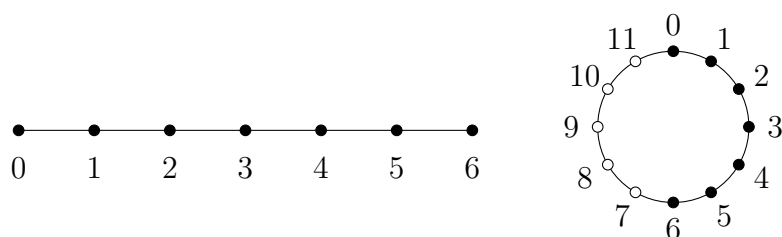


Figura 37: Exemples de conjunts profunds poc interessants

Com és lògic, els ritmes profunds més fàcils de construir són aquells formats per 3 atacs, ja que simplement s'haurà de construir un triangle isòsceles. Pel cas en que es tinguin 4 atacs, hi haurà un total de 6 distàncies pel que una haurà de repetir-se una vegada; una altra, dos i la restant, tres. Per tal de construir aquest ritme profund es dibuixarà un triangle equilàter. Pel que estarà assignada la distància que es repeteix tres vegades. Finalment es triarà un quart atac que sigui equidistant a dos dels 3 vèrtexs del triangle i així s'obtindrà que la distància amb l'altre vèrtex serà diferent de totes les altres.

En aquest apartat tornen a aparèixer els ritmes afrocubans, sorprenentment, tant el fume-fume com el bembé són ritmes profunds.

Un algorisme senzill, més interessant que el que s'ha presentat anteriorment, per generar ritmes profunds és el següent: donat un nombre de pulsacions n triem un nombre d que sigui relativament primer a n . S'assigna a la primera pulsació un atac i es comença a recórrer el ritme en sentit horari i s'assignaran atacs a messura que es recorri una distància d . D'aquesta manera, es poden anar afegint tants atacs com es vulgui ja que sempre es mantindrà la profunditat del ritme.

5.6 Ritmes closca

Definició: Diem que un ritme té la propietat de closca si, donada una propietat P del ritme, existeix una seqüència d'insercions o eliminacions d'atacs de manera que, després de cada acció, el ritme manté la propietat P .

Aquesta propietat s'ha vist al proposar l'algorisme de generació de ritmes profunds ja que per cada distància d que recorriem, s'inseria un nou atac i alhora, el ritme mantenia la propietat de la profunditat.

La manera més intuïtiva de veure si un ritme és closca per l'eliminació seria mirar les $a - 1$ distàncies que té un atac amb els altres $a - 1$ i, si totes aquestes són diferents, quan s'elimini aquest atac, el nombre de vegades que apareixerà la distància d_i es reduirà en 1 pel que seguirà sent profund. Anàlogament, per veure si admet aquesta propietat per l'inserció d'un nou atac s'hauria de fer el mateix procediment amb les pulsacions que són silencis i, si cada una de les a noves distàncies apareix una única vegada, es mantindrà la profunditat.

Una altra característica que és interessant estudiar tenint en compte la propietat closca és la "propietat de tots els intervals", que apareix quan, com el seu nom indica, en un ritme apareixen totes les possibles durades.

Aleshores, quan un ritme amb aquesta característica també té la propietat closca? La manera de comprovar-ho amb un ritme de n pulsacions i a atacs seria triar un conjunt de k atacs tal que satisfaci que $\frac{k \cdot (k-1)}{2} \geq \frac{n}{2}$. Així, si es veu que apareixen totes les possibles distàncies des de 1 fins $\frac{n}{2}$ i $k < a$ aleshores es poden eliminar tots aquells atacs que no pertanyin al conjunt donat ja que es mantindrà la propietat de tots els intervals. Aquest procediment es podria afinar per intentar trobar el mínim ritme amb tots els intervals, és a dir, aquell tal que si s'elimina qualsevol altra pulsació, deixa de tenir aquesta propietat. Per altra banda, es veu que, un cop trobat aquest conjunt, la inserció de nous atacs no aporta gran interès ja que no modificarà les distàncies trobades i només n'afegirà de repetides.

Aquesta pràctica és molt comú en improvisacions de percussionistes, es pren un ritme en qüestió amb una certa propietat i es juga amb insercions i eliminacions d'atacs per mantenir la mateixa propietat i generar així sensacions de canvi en l'oient.

Aquesta tècnica també és utilitzada pel compositor Steve Reich en l'obra *Drumming*, una peça de 75 minuts formada per 100 patrons rítmics diferents que va construint. Parteix d'un únic atac i va afegint de nous durant la primera meitat i després comença a eliminar-ne durant la segona meitat fins acabar de nou amb un atac. Un fet interessant és que aconsegueix que, durant la primera part, tots aquells patrons formats per 3, 4 o 5 atacs pertanyin a una semicircumferència, a més, els patrons amb 5 i 6 atacs presenten una simetria espectral respecte les pulsacions 4 i 10 però no en la segona part.

La característica que es podria dir que és la protagonista en aquesta obra és la simetria, tot i que no sempre és del mateix tipus, ja que es troba simetria espectral, rotacional i quasi-espectral pel que se li ha donat el nom de ritme closca de la simetria perseverant.

Una eina que ajuda a la construcció de ritmes closca és la teoria de grafs, on s'assigna a cada node un patró i aquest estarà connectat mitjançant una aresta amb aquells que estiguin a distància 1 d'ell. Per exemple, s'observa el de 4 pulsacions representat a la figura 38:

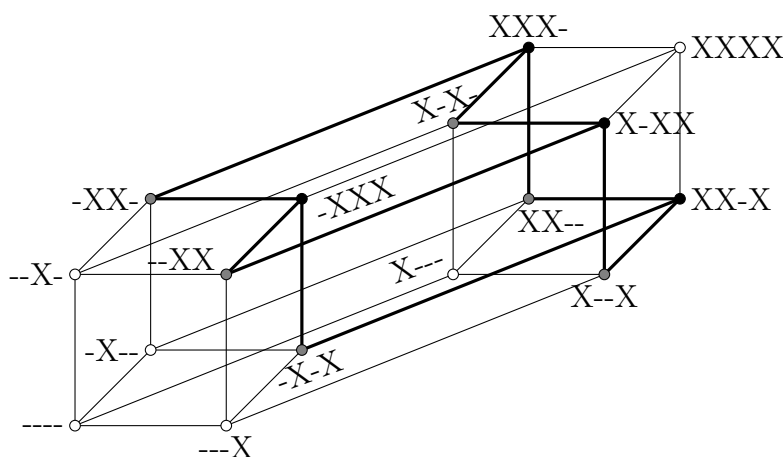


Figura 38: Patrons rítmics adjacents

Que dona lloc a un hipercub. Els nodes negres d'aquest graf són patrons amb 3 pulsacions que donen un ritme profund, i aquells grisos són els que tenen dos atacs.

5.7 Ritmes fantasma

Suposant que es toca un ritme sobre un tambor amb una baqueta, normalment el moviment que es farà serà suau i continu pel qual el braç anirà de dalt a baix descrivint el que es podria interpretar com una funció que assoleix la seva alçada màxima al punt mig de dos atacs i la seva alçada mínima on es dona un atac. Per exemple si es toca el patró [2-2-4], tal com s'ha dit, el braç assolirà l'alçada màxima a les pulsacions 1, 3 i 6 com s'observa a la següent figura i, habitualment, se'l coneix com l'ombra del ritme [2-2-4].

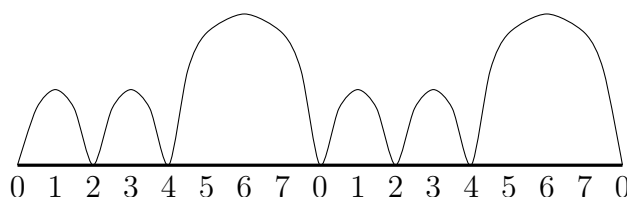


Figura 39: Oscil·lació del braç al tocar el compàs [2-2-4]

És important no confondre l'ombra del ritme amb un ritme subjectiu. Aquests són aquells que l'oient pot percebre però que són inexistents i que no es poden mesurar amb cap tipus d'aparell ja que no té un senyal acústic concurrent. Per altra banda, l'ombra d'un ritme, tot i tenir pulsacions on hi ha silencis, aquest està inserit intrínsecament a l'original i es pot detectar extraient els punts intermedis entre els seus atacs.

Per fer una comparativa amb els ritmes subjectius es considera la següent imatge on, sense que hi hagi cap línia que traci el dibuix, es poden percebre diferents figures geomètriques:

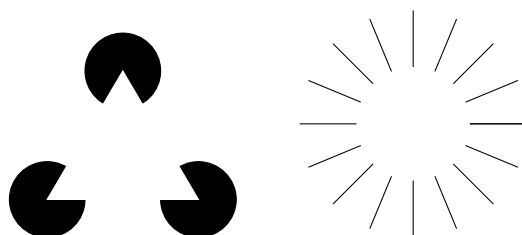


Figura 40: Il·lusions òptiques

A continuació es planteja un problema que no només és interessant en l'àmbit musical, sino que també com a enigma matemàtic que s'extreu d'observar que l'ombra del ritme [2-2-4] és més regular que l'original, ja que si es considera la regularitat com el quocient entre la durada més curta dividida per la durada més llarga s'obté que el coeficient de regularitat de l'original és $\frac{2}{4} = 0,5$ mentre que el de la seva ombra és $\frac{2}{3} = 0,6\widehat{6}$. Es pot seguir aplicant aquest procés i finalment s'obtindrà que l'atac amb major durada serà igual al de menor durada.

5.8 Ritmes de reflexió, cànons i ritmes alternats

A continuació s'estudiaran aquells ritmes que tenen la propietat de que per algun eix de simetria qualsevol, la reflexió d'aquest és la mateixa que el seu complementari. Els ritmes amb aquesta propietat són anomenats ritmes reflectidament entrelaçats i un clar exemple d'aquests seria el paradiddle, un exercici de tècnica que tot percussionista comença a practicar durant el seu primer any d'estudis musicals i que consisteix en el següent.

L'objectiu és guanyar independència amb totes dues mans i adquirir una millor coordinació, per tant, el músic intercala atacs alternats amb cada mà i dos atacs seguits amb una de les dues mans de la següent manera: **[D-E-D-D-E-D-E-E]** on **D** representa l'atac amb la dreta i **E** l'atac amb l'esquerra. A la figura 41 es representarà gràficament aquest ritme distingint el que fa la mà dreta i la mà esquerra:

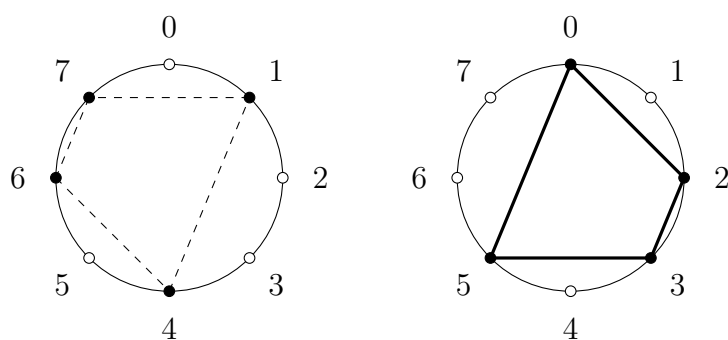


Figura 41: Representació geomètrica del paradiddle

Com es pot observar, l'eix de simetria es troba a la recta que bissecciona les arestes que connecten les pulsacions (0,1) i (4,5).

Ocorre el mateix amb els ritmes anomenats doble i triple paradiddle, on es prolonga la durada de la part on s'alternen les mans en 2 i 4 pulsacions respectivament.

Una altra tècnica és l'anomenada mans alternades. És molt semblant al paradiddle, sols que on hauria de repetir-se un atac amb la mateixa mà, aquest és reemplaçat per un silenci, quedant de la següent manera: **[D-E-D-○-E-D-E-○]**. Si s'observen les seves representacions gràfiques, mostrades a la figura 42 on els punts negres representen els atacs amb la mà dreta i els grisos els atacs amb la mà esquerra, s'observa que, respectivament, ambdues formen el ja conegut treset cubà. A més, cadascú es correspon amb una simetria espectral del seu homòleg amb eix de simetria l'aresta que connecta les pulsacions (1,5)

Per últim, es parlarà dels cànons rítmics, que són aquelles peces formades per dues o més rotacions d'un mateix ritme tocades al mateix temps. A més, cada rotació és tocada amb un instrument diferent (o almenys amb un to diferent) per tal de que es distingeixin i de manera que els atacs de les diferents veus no sonin mai a l'uníson. Per exemple, l'exercici del paradiddle o el de les mans alternades podrien considerar-se un canó si s'interpretaren, com s'ha dit, amb sonoritats diferents per cada mà.

Com a conseqüència dels exercicis de tècnica de les mans alternades, dona lloc als ritmes alternats, que són aquells en els que els atacs estan dividits en dos conjunts consecutius. És a dir, aquells que pertanyen al primer conjunt són tocats amb una mà i per tant, els del segon conjunt són tocats amb l'altra. Aquest tipus de ritmes són importants

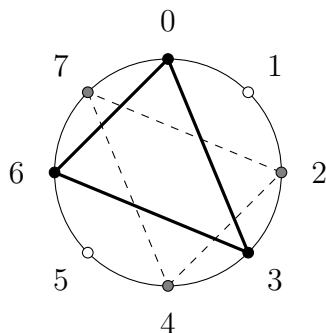


Figura 42: Exercici mans alternades

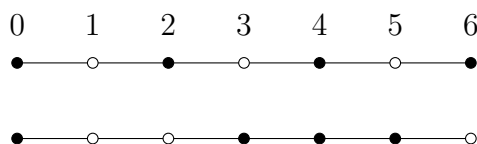
pels percusionistes ja que en diverses ocasions necessiten interioritzar aquesta alternança pel fet que, potser, en un moment donat d'una peça, els dos instruments que han de tocar estan físicament massa lluny per a poder alternar les mans. Un bon exemple podria ser una bateria, on, en general, una mà s'encarrega dels plats i l'altra dels toms i la caixa (a part del bombo tocat amb el peu). Aquests tipus de ritmes són interessants com a entrenament, ja que fan que el músic interioritzi la independència de les seves mans i així facilitar l'execució d'altres ritmes més complexos i fins i tot, tocar-los simultàniament.

5.9 Semblança i dissemblança rítmica

A la vida quotidiana és comú parlar de cançons que se semblen i això habitualment s'afirma guiant-se per alguns factors com ara si utilitzen els mateixos acords o si tenen una base rítmica quasi idèntica.

Però, com es podria parlar matemàticament d'una semblança o dissemblança rítmica? Durant aquesta secció s'intentarà donar una resposta aportant diferents definicions de distàncies rítmiques i explicant sota quines circumstàncies funcionen millor o són més acceptades.

Aquest problema ja ha sigut estudiat en altres àmbits i una possible manera és mitjançant la distància de Hamming. Si es consideren dos patrons rítmics, la distància de Hamming és el nombre de posicions on aquests patrons difereixen. Per exemple:



Aplicant la definició de la distància de Hamming, s'observa que les posicions on difereixen els dos patrons són 2,3,5 i 6 pel que la distància de Hamming serà de 4. Però potser en aquest cas, com que es té el mateix nombre d'atacs i silencis en ambdós casos, es pot parlar d'un altre tipus de distància d'intercanvi, que consisteix a mesurar el nombre mínim d'intercanvis de pulsacions adjacents per obtenir la mateixa seqüència rítmica. Per exemple, en el cas anterior, simplement fent els canvis (2,3) i (5,6) s'obtindrien les dues seqüències idèntiques, pel que s'obtindria una distància de 2.

Aquesta és un cas particular de l'anomenada distància de Minkowski que es defineix de la següent manera.

Definició: Siguin X i Y dos compassos amb el mateix nombre de pulsacions i atacs, la distància de Minkowski d'ordre $1 \leq p \leq \infty$ és expressada per la següet fórmula:

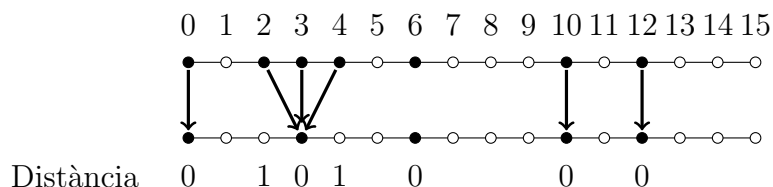
$$d_p(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^a |X_i - Y_i|^p \right)^{1/p}$$

En aquest cas, la distància de Minkowski d'ordre 1 seria de 2, igual que la d'intercanvi.

Com s'ha dit a les dos últimes definicions, una condició és que ambdós ritmes tinguin el mateix nombre d'atacs.

Però què passa si el nombre d'atacs és diferent?

Una solució és modificar les definicions introduïdes i adaptar-les a aquesta situació. Per exemple, la distància d'intercanvi passaria a dir-se distància d'intercanvi directa i consistiria a ser el mínim nombre d'intercanvis per tal de convertir el ritme més dens en aquell més dispers. Per exemple:



On s'obtindrà una altra vegada distància 2.

Tot i que aquesta distància pot funcionar bé quan dos ritmes són prou pareguts, quan es dona el cas que són molt diferents dona resultats no del tot satisfactoris en el sentit que no acaba de coincidir amb el criteri dels musicòlegs. És per això que té sentit contemplar una nova definició de distància que inclogui la fissió o fusió d'atacs en aquesta. La nova distància l'anomenarem assignació múltiple.

Per exemple es prenen els següents patrons rítmics i s'estudiarà com funcionen la distància d'intercanvi i l'assignació múltiple.

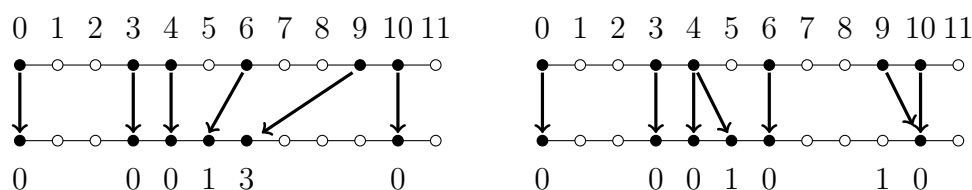


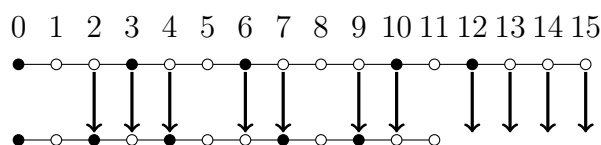
Figura 43: Intercanvi enfront assignació múltiple

On els nombres de sota indiquen el nombre d'iteracions que s'han hagut de fer per obtenir els respectius ritmes. En el cas dels intercanvis, s'ha de fer un intercanvi per moure l'atac de la pulsació 6 a la pulsació 5 i tres intercanvis per moure l'atac de la pulsació 9 a la pulsació 6. Mentre que mitjançant l'assignació múltiple s'ha dut a terme una fissió de l'atac a la pulsació 4 i una fusió dels atacs de les pulsacions 9 i 10, pel que obtenim una distància de 2.

Igual que abans s'han percebut errors quan s'ha parlat de comparar dos ritmes amb un nombre diferent d'atacs, ocorre el mateix quan volem comparar dos ritmes que tenen

un nombre diferent de pulsacions. Per tal de resoldre aquest problema, s'introduirà la coneguda distància d'edició o distància de Levenshtein, que mesura el nombre de "mutacions" que ha de tenir una seqüència de símbols per tal de transformar-se en una altra amb les restriccions de què aquestes transformacions únicament poden ser insercions, eliminacions i substitucions. Com el seu nom indica, una inserció afegeix un nou símbol en una posició donada, una eliminació suprimeix un símbol d'un lloc concret i la substitució únicament canvia el símbol d'una posició per un altre (en aquest cas, un atac per un silenci i viceversa).

Per exemple, si es volgués mesurar la distància que separa els ritmes clave son i fume-fume s'hauria d'estudiar el mínim nombre de transformacions que es poden fer per arribar al ritme objectiu.



Com s'observa a l'exemple anterior, s'han hagut d'efectuar 11 canvis al clave son per obtenir el fume-fume, però aquest no és el nombre mínim de moviments que s'han de fer. És per això que, a diferència de la resta de distàncies, aquesta és lleugerament més complexa en sentit computacional. La transformació mínima únicament requereix de 4 eliminacions si aquestes es trien com es mostra a continuació:

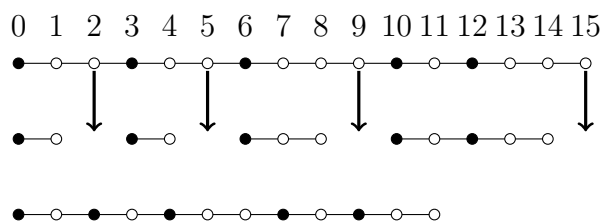


Figura 44: Distància d'edició entre el clave son i el fume-fume

6 Conclusions

L'objectiu del treball era fer un estudi exhaustiu dels ritmes musicals i dotar-los d'un enfoc matemàtic per veure en quins aspectes estaven relacionats.

Com era d'esperar, s'ha anat trobant que fins i tot un sol ritme satisfia una gran quantitat de propietats o característiques prèviament estudiades a les diferents branques de les matemàtiques.

Per una part, s'ha aconseguit donar una definició formal de la complexitat d'una subdivisió gràcies a la teoria de la computació, on es fracciona cada possible subdivisió en subunitats i s'estudia la complexitat de cadascuna d'aquestes per, finalment sumar-les i treure un valor numèric el més objectiu possible.

A més, s'ha pogut donar una sèrie d'aspectes geomètrics que tenen en comú els sis ritmes afrocubans, així com una manera esquemàtica de classificar qualsevol conjunt de ritmes.

Per altra banda s'ha donat una definició d'isomorfia per les dues representacions gràfiques dels ritmes i una sèrie de definicions de la complexitat del compàs, entés com el seu conjunt d'atacs i silencis des de diversos punts de vista i s'ha fet una comparació d'aquestes complexitats per tal de trobar els seus punts forts i febles.

Finalment, s'han esmentat diferents característiques que es poden trobar als ritmes, fent una anàlisi detallada de les propietats que sorgeixen i, fins i tot, la peculiar aplicació de l'algorisme d'Euclides per la construcció de ritmes, així com diferents criteris per determinar la semblança i la dissemblança entre dos patrons rítmics.

Per tot el que s'ha vist anteriorment, es pot afirmar que les matemàtiques sempre han estat implícites en la construcció dels ritmes musicals arreu del món, independentment de l'època, cultura o ubicació geogràfica.

Referències

- [Ben] David J. Benson, *Music: a mathematical offering*, Cambridge University Press, 2007.
Document online: <https://homepages.abdn.ac.uk/d.j.benson/pages/html/maths-music.html>, 2008
- [Jad] Chaithanya Jade, *Rhythm alternation using interval sets*, Master thesis sound and music computing, Universitat Pompeu Fabra, 2016.
- [Kei] M. Keith, *From polychords to Pólya*, Vinculum Press, 1991.
- [Loy] Gareth Loy, *Musimathics: the mathematical foundations of music* (vols 1 & 2), MIT Press, Cambridge, 2007.
- [McC] B.J. McCartin, “A geometric property of the octatonic scale”, *International Mathematical Forum*, 2007, 2(49):2417–2436.
- [Tót] L.F. Tóth, “On the sum of distances determined by a pointset”, *Acta Mathematica Academiae, Scientiarum Hungaricae* 7:397–401, 1956.
- [Tou] G.T. Toussaint, *The geometry of musical rhythm*, CRC Press, 2013.